

Álgebra Lineal

Apuntes de la asignatura

Grado en Ingeniería Electrónica
Industrial y Automática

Curso 2026-2027

Roberto Giménez Conejero

Segunda versión

Presentación

Estos apuntes recogen los contenidos de Álgebra Lineal para el Grado en Ingeniería Electrónica Industrial y Automática. El curso comienza con matrices y sistemas de ecuaciones. A partir de ellos se estudian los espacios vectoriales, las aplicaciones lineales y la diagonalización. Los últimos temas se dedican al producto escalar, las proyecciones, los mínimos cuadrados y las transformaciones ortogonales.

Los ejemplos de circuitos, sensores y modelos de estado muestran algunas aplicaciones de estos conceptos. Se han incluido procedimientos en pseudocódigo junto a los cálculos a mano. Las soluciones de los ejercicios están en el apéndice B y el formulario, en el apéndice C.

Conviene resolver los ejemplos antes de consultar su solución. Buena parte de los errores se detecta al sustituir el resultado en las ecuaciones originales, reconstruir un vector a partir de sus coordenadas o comprobar un producto matricial.

Los vectores se escriben como columnas cuando intervienen en un producto matricial. La notación $(x_1, \dots, x_n)$ indica sus componentes. A^T denota la traspuesta, I la identidad y $\text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$ el espacio generado por los vectores indicados. Salvo que se diga lo contrario, trabajaremos sobre $\mathbb{R}$.

Índice general

Presentación	i
1. Matrices, determinantes y sistemas	1
1.1. Matrices y sistemas de ecuaciones	1
1.2. Operaciones con matrices	1
1.3. Eliminación de Gauss	2
1.4. Rango y número de soluciones	3
1.5. Determinantes	4
1.6. Matriz inversa	4
1.7. Sistemas con parámetros	5
1.8. Algoritmos de cálculo	6
1.9. Ejercicios	8
2. Espacios vectoriales, bases y coordenadas	9
2.1. Espacios vectoriales	9
2.2. Subespacios vectoriales	9
2.3. Generadores e independencia lineal	10
2.4. Bases y dimensión	10
2.5. Ecuaciones, parámetros y generadores	11
2.6. Suma, intersección y complementos	11
2.7. Cambios de base	12
2.8. Algoritmos de cálculo	13
2.9. Ejercicios	14
3. Aplicaciones lineales y modelos matriciales	15
3.1. Aplicaciones lineales	15
3.2. Matriz de una aplicación lineal	15
3.3. Núcleo e imagen	16
3.4. Operaciones, composición e imágenes de subespacios	17
3.5. Cambio de bases en una aplicación	17
3.6. Algoritmos de cálculo	18
3.7. Ejercicios	20
4. Autovalores, diagonalización y Jordan	21
4.1. Autovalores y autovectores	21
4.2. Diagonalización	21
4.3. Subespacios invariantes	22
4.4. Forma de Jordan	22
4.5. Potencias de matrices	24
4.6. Algoritmos de cálculo	25
4.7. Ejercicios	27
5. Producto escalar, proyecciones y ajuste de datos	28
5.1. Producto escalar y matriz de Gram	28
5.2. Norma, distancia y ángulo	28
5.3. Bases ortonormales y Gram-Schmidt	29
5.4. Complemento ortogonal y proyección	29
5.5. Mínimos cuadrados	31
5.6. Algoritmos de cálculo	32
5.7. Ejercicios	34
6. Matrices simétricas y transformaciones ortogonales	35
6.1. Diagonalización de matrices simétricas	35
6.2. Formas cuadráticas y signo	35
6.3. Transformaciones ortogonales	36
6.4. Giros y reflexiones en el plano	36

6.5. Giros y reflexiones en el espacio	37
6.6. Algoritmos de cálculo	38
6.7. Ejercicios	39
A. Repaso de complejos y lenguaje algebraico	40
A.1. Operar en forma binómica	40
A.2. Forma polar, potencias y raíces	40
A.3. Grupo, anillo y cuerpo	41
A.4. Ejercicios de repaso	42
B. Soluciones explicadas	43
B.1. Tema 1. Matrices y sistemas	43
B.2. Tema 2. Espacios y bases	44
B.3. Tema 3. Aplicaciones lineales	44
B.4. Tema 4. Autovalores y Jordan	45
B.5. Tema 5. Ortogonalidad y ajuste	46
B.6. Tema 6. Geometría de las matrices	47
B.7. Repaso del apéndice A	48
C. Formulario y guía de decisión	49
C.1. Sistemas, bases y aplicaciones	49
C.2. Autovalores y geometría	49
C.3. Elección del método de cálculo	51
C.4. Comprobación de los resultados	51
Créditos y procedencia	52

Tema 1

Matrices, determinantes y sistemas

1.1 Matrices y sistemas de ecuaciones

Una matriz es una tabla rectangular de números. Si tiene m filas y n columnas, su tamaño es $m \times n$. El número a_{ij} ocupa la fila i y la columna j .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}.$$

Cuando $m = n$, la matriz es cuadrada. Su diagonal principal contiene $a_{11}, \dots, a_{nn}$. Una matriz diagonal tiene ceros fuera de esa diagonal; una triangular superior tiene ceros por debajo. La identidad I_n es diagonal con unos en la diagonal.

Un sistema con m ecuaciones y n incógnitas se escribe

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad b \in \mathbb{R}^m.$$

La fila i contiene los coeficientes de la ecuación i ; la columna j , los de la incógnita x_j .

Aplicación. Dos corrientes acopladas.

Un modelo sencillo de dos mallas, con resistencias expresadas en ohmios y tensiones en voltios, da

$$\begin{cases} 4i_1 - i_2 = 7, \\ -i_1 + 3i_2 = 2. \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Los términos negativos se deben a la resistencia que comparten las dos mallas, con los sentidos de corriente elegidos. Al resolver se obtiene $i_1 = 23/11$ A e $i_2 = 15/11$ A. Estas corrientes satisfacen las dos ecuaciones.

1.2 Operaciones con matrices

Dos matrices se suman si tienen el mismo tamaño, elemento a elemento. Multiplicar por un escalar significa multiplicar todas sus entradas por ese número.

Para calcular AB , el número de columnas de A debe coincidir con el número de filas de B :

$$(m \times n)(n \times p) \longrightarrow m \times p, \quad (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

Cada entrada es el producto de una fila de A por una columna de B .

Ejemplo 1.1. Multiplicar dos matrices.

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 4 \\ 0 \cdot 3 - 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 - 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Al invertir el orden aparece $BA = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Por tanto, $AB \neq BA$.

El producto de matrices es asociativo, $(AB)C = A(BC)$, y distributivo respecto de la suma. No es conmutativo: AB y BA pueden ser distintos e incluso tener tamaños diferentes.

La traspuesta se obtiene intercambiando filas y columnas. Se cumplen las identidades

$$(A + B)^T = A^T + B^T, \quad (AB)^T = B^T A^T, \quad (A^T)^T = A.$$

Una matriz cuadrada es **simétrica** si $A^T = A$.

Orden de los factores.

La cancelación de factores exige que la matriz correspondiente sea invertible. Tampoco se pueden desarrollar potencias sin tener en cuenta el orden de los productos. Por ejemplo, $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$; la forma $A^2 + 2AB + B^2$ requiere $AB = BA$.

1.3 Eliminación de Gauss

Para resolver $Ax = b$ se trabaja con la matriz ampliada $(A \mid b)$. Se permiten tres operaciones por filas:

1. Intercambiar dos filas.
2. Multiplicar una fila por un número **distinto de cero**.
3. Sumar a una fila un múltiplo de otra.

Estas operaciones producen sistemas equivalentes. La columna b debe recibir las mismas operaciones que los coeficientes.

La eliminación de Gauss busca una matriz **escalonada**: las filas nulas quedan al final y el primer elemento no nulo de cada fila queda a la derecha del de la fila anterior. Ese elemento es un **pivote**. Una vez escalonado el sistema, se despejan las incógnitas empezando por la última ecuación. Si se hacen también ceros por encima de los pivotes y se normalizan a uno, se obtiene la forma escalonada reducida, propia de Gauss-Jordan.

Ejemplo 1.2. Un sistema de tres incógnitas.

Resolvemos

$$\begin{cases} x + y + z = 4, \\ 2x - y + z = 2, \\ x + 2y - z = 2. \end{cases}$$

La matriz ampliada se transforma así:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1, \\ F_3 \leftarrow F_3 - F_1,}]{\substack{F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1, \\ F_3 \leftarrow F_3 - F_1,}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{array} \right).$$

Intercambiamos las filas segunda y tercera. Después hacemos $F_3 \leftarrow F_3 + 3F_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -7 & -12 \end{array} \right).$$

La última ecuación da $z = 12/7$; la segunda, $y = 10/7$; la primera, $x = 6/7$. Como comprobación,

$$2\frac{6}{7} - \frac{10}{7} + \frac{12}{7} = 2.$$

La sustitución en las otras dos ecuaciones da también los términos independientes correspondientes.

1.4 Rango y número de soluciones

El **rango** de una matriz es el número de filas no nulas de una forma escalonada. Equivale al número de pivotes y al máximo número de columnas linealmente independientes. Se escribe $\text{rg}(A)$.

$$0 \leq \text{rg}(A) \leq \min(m, n), \quad \text{rg}(A) = \text{rg}(A^T).$$

Las operaciones elementales por filas conservan el rango. Para productos compatibles, $\text{rg}(AB) \leq \min\{\text{rg}(A), \text{rg}(B)\}$.

Criterio de Rouché-Frobenius.

En $Ax = b$, con n incógnitas:

Condición	Consecuencia
$\text{rg}(A) < \text{rg}(A b)$	Sistema incompatible: no hay solución.
$\text{rg}(A) = \text{rg}(A b) = n$	Compatible determinado: hay una única solución.
$\text{rg}(A) = \text{rg}(A b) = r < n$	Compatible indeterminado: hay $n - r$ parámetros libres.

Sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, la última situación produce infinitas soluciones.

Una fila $[0 \cdots 0 \mid c]$ con $c \neq 0$ expresa $0 = c$ y demuestra que no hay solución. Una fila totalmente nula corresponde a una ecuación que no añade ninguna restricción.

Ejemplo 1.3. Soluciones con dos parámetros libres.

Considera $x + 2y - z = 3$ y $2x + 4y - 2z = 6$. La segunda ecuación repite la primera; el rango es uno. Hay tres incógnitas y, por tanto, **dos** parámetros libres. Tomando $y = s$ y $z = t$:

$$(x, y, z) = (3 - 2s + t, s, t) = (3, 0, 0) + s(-2, 1, 0) + t(1, 0, 1).$$

Cada elección de $s, t \in \mathbb{R}$ produce una solución.

1.4.1 Sistemas homogéneos

Si $b = 0$, el sistema siempre admite $x = 0$. Tiene soluciones no nulas exactamente cuando $\text{rg}(A) < n$. Las soluciones homogéneas forman un subespacio de dimensión $n - \text{rg}(A)$.

Si un sistema no homogéneo es compatible y x_p es una solución particular, todas sus soluciones son

$$x = x_p + x_h, \quad Ax_h = 0.$$

En efecto, si $Ax = b$ y $Ax_p = b$, entonces $A(x - x_p) = 0$. El conjunto de soluciones se obtiene, por tanto, sumando a x_p todas las soluciones del sistema homogéneo.

1.5 Determinantes

El determinante es un escalar asociado a una matriz cuadrada. Es distinto de cero si y solo si sus columnas son linealmente independientes. Para una matriz de orden dos,

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

El valor absoluto del determinante mide el factor por el que se multiplican las áreas en el plano o los volúmenes en el espacio. Si es cero, la imagen queda contenida en un subespacio de dimensión menor.

Para una matriz triangular, el determinante es el producto de la diagonal. En una matriz general puede triangularse por filas, registrando el efecto de cada operación:

Operación	Efecto en el determinante
Intercambiar dos filas	Cambia el signo.
Multiplicar una fila por c	Multiplica el determinante por c .
$F_i \leftarrow F_i + cF_j, i \neq j$	No cambia el determinante.

Ejemplo 1.4. Un determinante mediante eliminación.

Para $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, hacemos $F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1$ y después $F_3 \leftarrow F_3 - 2F_2$:

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ninguna operación modifica el determinante. Como la diagonal final contiene un cero, $\det(A) = 0$ y $\operatorname{rg}(A) = 2$.

1.5.1 Cofactores y propiedades

El menor M_{ij} es el determinante que queda al eliminar la fila i y la columna j . Su cofactor es $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. El desarrollo por una fila i es

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} C_{ij}.$$

También se puede desarrollar por una columna. Conviene elegir una con muchos ceros. La regla de Sarrus sirve únicamente en tamaño 3×3 .

Para matrices cuadradas del mismo tamaño:

$$\det(AB) = \det(A) \det(B), \quad \det(A^T) = \det(A), \quad \det(cA) = c^n \det(A).$$

En general, $\det(A + B)$ no es $\det(A) + \det(B)$.

1.6 Matriz inversa

La inversa de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz A^{-1} que cumple $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Existe si y solo si

$$\det(A) \neq 0 \iff \operatorname{rg}(A) = n.$$

Para calcularla por Gauss-Jordan se aplica cada operación a toda la matriz $(A \mid I)$ hasta obtener $(I \mid A^{-1})$. Si no se consigue transformar el bloque izquierdo en I , la matriz no es invertible.

En dimensión dos hay una fórmula directa:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad ad-bc \neq 0.$$

Ejemplo 1.5. Invertir y comprobar.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, con determinante uno. En Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right).$$

Se han intercambiado las filas, eliminado la primera columna y normalizado el segundo pivote.

Así, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Multiplicar AA^{-1} devuelve I_2 .

Las propiedades esenciales son

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T, \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

La matriz adjunta es $\text{adj}(A) = (C_{ij})^T$, y permite escribir $A^{-1} = \text{adj}(A)/\det(A)$ si $\det(A) \neq 0$. Para resolver un sistema concreto suele ser más eficiente aplicar Gauss directamente que calcular la inversa.

1.7 Sistemas con parámetros

En un sistema con parámetros, el rango puede cambiar cuando se anula un pivote. Antes de dividir por una expresión que dependa del parámetro, hay que estudiar por separado sus ceros.

Ejemplo 1.6. Separar los casos especiales.

Considera

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ x + ay = 3. \end{cases}$$

Restar la primera ecuación a la segunda da $(a-1)y = 1$.

- Si $a \neq 1$, hay una solución: $y = 1/(a-1)$, $x = 2 - 1/(a-1)$.
- Si $a = 1$, aparece $0 = 1$: el sistema es incompatible.

Si el segundo término independiente hubiera sido 2, el caso $a = 1$ tendría infinitas soluciones. Cuando el determinante se anula, hay que comparar los rangos de la matriz de coeficientes y de la ampliada.

Procedimiento para un sistema.

Para resolver un sistema se escalona $(A \mid b)$ y se comprueba si aparece alguna contradicción. Si es compatible, se asignan parámetros a las variables libres y se despejan las variables pivote por sustitución hacia atrás.

1.8 Algoritmos de cálculo

En el pseudocódigo, $u \leftarrow v$ significa «asignar a u el valor de v ». **Para** repite una acción, **Si** distingue casos y **Devolver** indica el resultado. Los índices recorren filas y columnas desde uno.

Algoritmo. Eliminación de Gauss y rango.

Entrada: matriz M de m filas; n columnas de coeficientes. Si hay un sistema, $M = (A \mid b)$.

$f \leftarrow 1$; lista de pivotes $L \leftarrow \emptyset$.

Para $j = 1, \dots, n$:

Si $f > m$: terminar el bucle.

 Buscar una fila $p \geq f$ con $M_{pj} \neq 0$.

Si no existe: pasar a la siguiente columna.

 Intercambiar las filas p y f .

 Añadir la columna j a L .

Para $i = f + 1, \dots, m$:

$c \leftarrow M_{ij}/M_{fj}$.

$F_i \leftarrow F_i - cF_f$ sobre **toda** la fila.

$f \leftarrow f + 1$.

Devolver M escalonada, L y rango $r = |L|$.

En cada columna se busca un pivote para eliminar las entradas inferiores. Cuando no hay pivote, se pasa a la columna siguiente manteniendo la fila actual. En una matriz ampliada, la última columna no se usa para elegir pivotes de A .

La matriz escalonada debe tener r filas de coeficientes no nulas. Para cálculos decimales se usa una tolerancia y suele elegirse el pivote de mayor valor absoluto entre las filas disponibles; en los ejercicios exactos, «cero» significa cero exacto.

Algoritmo. Clasificar y resolver un sistema.

Entrada: $Ax = b$, con n incógnitas.

Escalonar $(A \mid b)$ mediante Gauss.

Si aparece $[0 \ \cdots \ 0 \mid c]$, $c \neq 0$:

Devolver «sin solución».

$r \leftarrow$ número de pivotes en las columnas de A .

Asignar un parámetro a cada variable sin pivote.

Para cada fila con pivote, desde la última hasta la primera:

 Sustituir las variables ya conocidas y despejar la variable pivote.

Devolver la solución; será única si $r = n$.

La sustitución hacia atrás convierte las ecuaciones escalonadas en valores o expresiones con parámetros. Si hay parámetros en los coeficientes, se abren casos antes de dividir por una expresión que pueda anularse.

Algoritmo. Determinante mediante eliminación.

Entrada: matriz cuadrada A de orden n .

$M \leftarrow A$; $s \leftarrow 1$.

Para $j = 1, \dots, n$:

 Buscar $p \geq j$ con $M_{pj} \neq 0$.

Si no existe: **devolver** 0.

Si $p \neq j$: intercambiar filas y hacer $s \leftarrow -s$.

Para $i = j + 1, \dots, n$:

$F_i \leftarrow F_i - (M_{ij}/M_{jj})F_j$.

Devolver $s \prod_{j=1}^n M_{jj}$.

La matriz se triangulariza sin multiplicar filas por escalares, de modo que solo hay que registrar los cambios de signo. Si se normalizan los pivotes, también deben registrarse los factores usados.

Algoritmo. Inversa por Gauss-Jordan.

Entrada: una matriz cuadrada A de orden n .

$M \leftarrow (A \mid I_n)$.

Para $j = 1, \dots, n$:

 Buscar $p \geq j$ con $M_{pj} \neq 0$.

Si no existe: **devolver** «no hay inversa».

 Intercambiar filas p y j .

$F_j \leftarrow F_j/M_{jj}$.

Para $i \neq j$:

$F_i \leftarrow F_i - M_{ij}F_j$.

Devolver el bloque derecho de M .

Se normalizan los pivotes y se eliminan las entradas superiores e inferiores en los dos bloques. Al terminar, el bloque izquierdo debe ser I_n . La matriz obtenida a la derecha debe satisfacer $AA^{-1} = I_n$.

1.9 Ejercicios

- 1.1.** Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Indica los tamaños de AB y BA y calcula ambos.
- 1.2.** Calcula el determinante y la inversa de $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Verifica $MM^{-1} = I$.
- 1.3.** Resuelve por Gauss: $x + y + z = 4$, $2x - y + z = 2$, $x + 2y - z = 2$.
- 1.4.** Clasifica y resuelve $x + 2y - z = 1$, $2x + 4y - 2z = 2$. Después cambia el último 2 por 3 y vuelve a clasificarlo.
- 1.5.** Estudia, según a , el sistema $x + y = 2$, $x + ay = 2$. Da la solución o la familia de soluciones.
- 1.6.** Determina el rango de $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y una expresión de todas las soluciones de $Nx = 0$.
- 1.7.** Un circuito se modela mediante $3i_1 - i_2 = 5$, $-i_1 + 2i_2 = 0$. Calcula las corrientes y comprueba ambas ecuaciones.
- 1.8.** Calcula $\det(T)$ para $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. ¿Es invertible? ¿Cuál es $\det(2T)$?

Tema 2

Espacios vectoriales, bases y coordenadas

2.1 Espacios vectoriales

Además de las ternas de números, también podemos considerar vectores los polinomios, las matrices o las secuencias de medidas. En todos estos casos están definidas una suma y una multiplicación por escalares que satisfacen las mismas propiedades.

Un **espacio vectorial** sobre $\mathbb{K}$ es un conjunto con esas dos operaciones. La suma es asociativa y conmutativa, existe un vector cero y cada vector tiene un opuesto. El producto por escalares cumple

$$\begin{aligned}\alpha(u+v) &= \alpha u + \alpha v, & (\alpha+\beta)u &= \alpha u + \beta u, \\ \alpha(\beta u) &= (\alpha\beta)u, & 1u &= u.\end{aligned}$$

Los resultados de las operaciones deben permanecer en el conjunto.

Los ejemplos básicos son $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, las matrices de un tamaño fijo y los polinomios de grado **menor o igual** que d , denotados por $\mathcal{P}_d$. En $\mathcal{P}_d$ se incluye el polinomio cero. Los polinomios de grado exactamente d no forman, en general, un espacio vectorial.

Aplicación. Superponer señales.

Si u y v son dos secuencias de N muestras, se representan en $\mathbb{R}^N$. La combinación $2u - v$ también tiene N muestras. Estas combinaciones aparecen, por ejemplo, al sumar o filtrar señales. Su interpretación como superposición supone que el modelo del dispositivo es lineal.

2.2 Subespacios vectoriales

Un subconjunto $U \subseteq V$ es un subespacio si contiene el vector cero y es cerrado para la suma y el producto por escalares. Estas condiciones pueden reunirse en el siguiente criterio:

$$U \neq \emptyset, \quad \alpha u + \beta v \in U \quad \text{para todo } u, v \in U, \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Si el conjunto no contiene el cero, no es un subespacio. Esta condición es necesaria, pero por sí sola no basta.

Ejemplo 2.1. Una restricción de corrientes.

Sea $U = \{(i_1, i_2, i_3) \in \mathbb{R}^3 : i_1 + i_2 - i_3 = 0\}$. Contiene al cero. Si dos ternas satisfacen la ecuación, también la satisfacen su suma y cualquier múltiplo. Por tanto, U es un subespacio.

Despejando $i_3 = i_1 + i_2$:

$$(i_1, i_2, i_3) = s(1, 0, 1) + t(0, 1, 1).$$

La ecuación describe las corrientes permitidas en un nodo sin inyección externa, con los sentidos elegidos.

La condición $i_1 + i_2 - i_3 = 5$ no define un subespacio: el cero no la cumple. Es un conjunto **afín**, desplazado respecto del subespacio homogéneo. Tampoco es subespacio la unión de los ejes del plano: $(1, 0)$ y $(0, 1)$ pertenecen a ella, pero su suma no.

El conjunto de soluciones de $Ax = 0$ siempre es un subespacio. El conjunto de soluciones de $Ax = b$ con $b \neq 0$, si es no vacío, es una traslación de ese subespacio.

2.3 Generadores e independencia lineal

Una combinación lineal de $v_1, \dots, v_k$ tiene la forma

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k.$$

El conjunto de todas esas combinaciones es $\text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$, llamado espacio generado. Si coincide con V , los vectores forman un sistema generador de V .

Los vectores son **linealmente independientes** si

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0 \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0.$$

Si existe una relación con algún coeficiente no nulo, son dependientes: al menos uno se obtiene combinando los otros.

Prueba matricial de independencia.

Si $M = (v_1 \dots v_k)$, los vectores son independientes si y solo si $\text{rg}(M) = k$. Esto equivale a que $Mc = 0$ tenga únicamente la solución $c = 0$. La pertenencia de b al espacio generado se estudia resolviendo $Mc = b$.

Ejemplo 2.2. Detectar una medida redundante.

Sean $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ y $v_3 = (2, 1, 3)$. Como $v_3 = 2v_1 + v_2$, el tercer vector es una combinación de los dos primeros. Los dos primeros son independientes: $\alpha v_1 + \beta v_2 = 0$ obliga a $\alpha = \beta = 0$ por las dos primeras componentes.

El vector $b = (3, -2, 1)$ sí pertenece al espacio generado, pues $b = 3v_1 - 2v_2$. En cambio, $(0, 0, 1)$ no pertenece: todas las combinaciones cumplen $z = x + y$.

2.4 Bases y dimensión

Una **base** es una familia de vectores linealmente independientes que genera todo el espacio. En una base $B = (b_1, \dots, b_n)$, cada vector tiene una expresión única

$$v = c_1 b_1 + \dots + c_n b_n.$$

La columna $[v]_B = (c_1, \dots, c_n)^T$ contiene las **coordenadas** de v en esa base. Las coordenadas se escriben en el mismo orden que los vectores de la base.

Todas las bases de un espacio de dimensión finita tienen el mismo número de vectores. Ese número es su **dimensión**. Así, $\dim \mathbb{R}^n = n$, $\dim \mathcal{P}_d = d + 1$ y $\dim \mathbb{R}^{m \times n} = mn$. El espacio $\{0\}$ tiene dimensión cero y base vacía.

Ejemplo 2.3. Coordenadas distintas para el mismo vector.

Consideremos en $\mathbb{R}^2$ la base $B = ((1, 1), (1, -1))$. Para expresar $v = (6, 2)$ buscamos c_1, c_2 :

$$c_1(1, 1) + c_2(1, -1) = (6, 2) \iff \begin{cases} c_1 + c_2 = 6, \\ c_1 - c_2 = 2. \end{cases}$$

Se obtiene $[v]_B = (4, 2)^T$. Se trata del mismo vector $(6, 2)$, expresado ahora mediante sus coordenadas en B .

2.4.1 Extraer o completar una base

Si se parte de generadores redundantes, se escalona la matriz que los tiene como columnas y se identifican las columnas con pivote. Se conservan las columnas correspondientes de la **matriz original**. Las operaciones por filas mantienen las relaciones de dependencia entre columnas, pero pueden cambiar el subespacio que ellas generan.

Para ampliar una familia independiente hasta una base de $\mathbb{R}^n$, se añaden vectores que aumenten el rango. Los vectores canónicos $e_1, \dots, e_n$ proporcionan candidatos sencillos.

Vectores y coordenadas.

La igualdad $v = P_B[v]_B$ distingue el vector de su columna de coordenadas: P_B contiene los vectores de la base y permite pasar de unas coordenadas a otras.

2.5 Ecuaciones, parámetros y generadores

Un subespacio puede darse de forma **implícita**, mediante $Ax = 0$, o de forma **generada**, mediante $x = Mc$. Ambas describen el mismo conjunto desde puntos de vista distintos.

2.5.1 De ecuaciones a una base

Se resuelve $Ax = 0$, se elige un parámetro por variable libre y se separa la solución por parámetros. Los vectores que multiplican a esos parámetros forman una base.

Ejemplo 2.4. Dos ecuaciones en cuatro variables.

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^4$ definido por $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ y $x_2 - x_3 + x_4 = 0$. Tomamos $x_3 = s$, $x_4 = t$. Entonces $x_2 = s - t$ y $x_1 = -2s + t$:

$$x = s(-2, 1, 1, 0) + t(1, -1, 0, 1).$$

Una base es $((-2, 1, 1, 0), (1, -1, 0, 1))$ y $\dim U = 2$. También se obtiene $4 - \text{rg}(A) = 4 - 2 = 2$.

2.5.2 De generadores a ecuaciones

Si $U = \text{Im}(M)$, una forma de obtener sus ecuaciones es calcular los vectores a que satisfacen $M^T a = 0$. Para cada vector de una base de ese conjunto se escribe $a^T x = 0$. Sobre $\mathbb{R}$, estas ecuaciones describen exactamente U .

Ejemplo 2.5. Un plano dado por dos vectores.

Para $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, el sistema $M^T a = 0$ da $a_1 + a_3 = 0$, $a_2 + a_3 = 0$. Podemos elegir $a = (-1, -1, 1)$.

Por tanto,

$$\text{span}\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\} = \{(x, y, z) : -x - y + z = 0\}.$$

En coordenadas complejas, el tratamiento ortogonal emplea la traspuesta conjugada; aquí el cálculo de ecuaciones se ha planteado sobre $\mathbb{R}$.

2.6 Suma, intersección y complementos

La intersección $U \cap W$ contiene los vectores que pertenecen a ambos subespacios. Se obtiene imponiendo a la vez sus restricciones.

La suma es $U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$. Se obtiene juntando generadores de ambos y eliminando redundancias. La unión $U \cup W$ es una operación diferente y, en general, no es un subespacio.

Las dimensiones cumplen

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

La dimensión de la intersección se resta porque sus vectores pertenecen a los dos subespacios.

La suma es **directa**, $U \oplus W$, si $U \cap W = \{0\}$. En ese caso cada vector de la suma se descompone de manera única como $u + w$. Si además $U \oplus W = V$, se dice que U y W son **suplementarios** en V .

Ejemplo 2.6. Dos planos que comparten una recta.

Consideremos en $\mathbb{R}^3$ los planos $U = \{z = 0\}$ y $W = \{y = 0\}$. Ambos tienen dimensión dos. Su intersección es el eje x , de dimensión uno. Por tanto, $\dim(U + W) = 2 + 2 - 1 = 3$ y $U + W = \mathbb{R}^3$. La suma no es directa.

En cambio, U y el eje z son suplementarios. La descomposición $(x, y, z) = (x, y, 0) + (0, 0, z)$ es única.

Si ambos subespacios vienen dados por matrices de generadores, para hallar la intersección se resuelve $M_U \alpha = M_W \beta$. Después se reconstruyen los vectores comunes con $M_U \alpha$ y se extrae una base de esos resultados.

2.7 Cambios de base

Sean B y C bases de $\mathbb{R}^n$, y sean P_B y P_C las matrices que tienen sus vectores como columnas en coordenadas canónicas. Las dos matrices son invertibles.

$$v = P_B[v]_B = P_C[v]_C.$$

De aquí se obtiene

$$[v]_C = P_C^{-1} P_B [v]_B.$$

La matriz $P_C^{-1} P_B$ pasa de coordenadas en B a coordenadas en C . La igualdad anterior permite comprobar el sentido del cambio.

Ejemplo 2.7. Del sistema canónico a una base nueva.

Con $B = ((1, 1), (1, -1))$ y la base canónica E :

$$P_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P_B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Así, $[v]_B = P_B^{-1} [v]_E$. Para $v = (6, 2)$ se recupera $(4, 2)^T$. El cambio inverso es $[v]_E = P_B [v]_B$.

Las mismas ideas valen para polinomios. En $E = (1, t, t^2)$, el polinomio $2 - 3t + t^2$ tiene coordenadas $(2, -3, 1)^T$. Cada polinomio de una nueva base se representa como una columna en E , y se aplica la misma fórmula.

2.8 Algoritmos de cálculo

Algoritmo. Obtener una base de generadores.

Entrada: vectores $v_1, \dots, v_k$ en un orden fijado.

$M \leftarrow (v_1 \cdots v_k)$.

Aplicar Gauss a una copia de M .

$L \leftarrow$ índices de las columnas con pivote.

Devolver los vectores originales v_j con $j \in L$.

Las columnas con pivote son independientes y generan el mismo espacio que las columnas iniciales. Por eso se toman de la matriz original. La base obtenida debe tener $\text{rg}(M)$ vectores.

Algoritmo. Base de un subespacio definido por ecuaciones.

Entrada: $U = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$.

Resolver $Ax = 0$ por Gauss.

$q \leftarrow n - \text{rg}(A)$; nombrar los parámetros $t_1, \dots, t_q$.

Para $j = 1, \dots, q$:

Fijar $t_j = 1$ y los demás parámetros a cero.

Reconstruir la solución u_j .

Devolver $(u_1, \dots, u_q)$ y dimensión q .

Cada vector corresponde a fijar uno de los parámetros a uno y los demás a cero. Si $q = 0$, la base es vacía y $U = \{0\}$. Los vectores deben satisfacer $Au_j = 0$ y formar una familia de rango q .

Algoritmo. Suma e intersección de subespacios.

Entrada: matrices de bases M_U y M_W .

Base de la suma $\leftarrow$ extraer una base de $(M_U \ M_W)$.

Resolver $(M_U \ -M_W) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$.

Para cada solución básica (α_j, β_j) :

$z_j \leftarrow M_U \alpha_j$.

Base de la intersección $\leftarrow$ extraer una base de los z_j .

Devolver ambas bases.

El sistema iguala una combinación de vectores de U con otra de vectores de W . Al reconstruir las soluciones comunes se eliminan los vectores nulos o dependientes. Las dimensiones deben cumplir la fórmula de la suma y la intersección.

Algoritmo. Coordenadas y cambio de base.

Entrada: un vector v y una base B , o coordenadas $c = [v]_B$ y una base de destino C .

Construir P_B con las columnas de B .

Si se piden coordenadas de v en B :

Resolver $P_B c = v$; **devolver** c .

Si se cambia de B a C :

$v \leftarrow P_B c$.

Construir P_C y resolver $P_C d = v$.

Devolver $d = [v]_C$.

Primero se reconstruye el vector y después se calculan sus coordenadas en la base de destino. Basta resolver un sistema, sin calcular una inversa. Las dos representaciones deben satisfacer $P_B c = P_C d$.

2.9 Ejercicios

- 2.1.** Decide cuáles son subespacios: $U = \{x + y - z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$, $W = \{x + y - z = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ y $S = \{(x, y) : xy = 0\} \subset \mathbb{R}^2$. Justifica cada respuesta.
- 2.2.** Sean $u = (1, 0, 1)$, $v = (0, 1, 1)$ y $w = (1, 1, 2)$. Extrae una base de su espacio generado y escribe $(2, -1, 1)$ en esa base.
- 2.3.** Halla las coordenadas de $(5, 1)$ en $B = ((1, 1), (1, -1))$. Escribe las matrices que convierten coordenadas de B a las canónicas y viceversa.
- 2.4.** Para $U = \{x + y + z = 0\}$ y $W = \{z = 0\}$, obtiene bases y dimensiones de U , W , $U \cap W$ y $U + W$. ¿Es una suma directa?
- 2.5.** Calcula una base de las soluciones de $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_2 - x_3 + x_4 = 0$.
- 2.6.** En $\mathcal{P}_2$, considera $U = \{p : p(0) = p(1) = 0\}$. Obtén una base y expresa $3t^2 - 3t$ en ella.
- 2.7.** Completa $((1, 1, 0), (0, 1, 1))$ hasta una base de $\mathbb{R}^3$ usando un vector canónico. Indica un suplementario del plano generado.
- 2.8.** Obtén una ecuación implícita de $\text{span}\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$. Usa el pseudocódigo para decidir si $(2, 3, 4)$ pertenece a ese subespacio.

Tema 3

Aplicaciones lineales y modelos matriciales

3.1 Aplicaciones lineales

Una aplicación $f : V \rightarrow W$ es lineal si respeta las combinaciones lineales:

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v).$$

Esta igualdad expresa conjuntamente la aditividad y la compatibilidad con el producto por escalares. En particular, $f(0) = 0$. Todas las aplicaciones $x \mapsto Ax$ son lineales.

La condición $f(0) = 0$ permite descartar algunas aplicaciones, pero no basta para demostrar la linealidad. Por ejemplo, $f(x) = x^2$ cumple $f(0) = 0$ y no es lineal, porque $f(2x) = 4x^2$ no coincide con $2f(x)$.

Ejemplo 3.1. Tres reglas de transformación.

La aplicación $f(x, y) = (2x - y, 3y)$ es lineal: cada componente es una combinación lineal de las entradas, sin productos entre variables ni términos constantes.

La aplicación $g(x, y) = (2x - y + 1, 3y)$ es afín y no lineal, pues $g(0, 0) = (1, 0)$. La aplicación $h(x, y) = (xy, y)$ tampoco es lineal: $h(1, 0) + h(0, 1) = (0, 1)$, mientras que $h(1, 1) = (1, 1)$.

Aplicación. Un sistema de medida.

En un modelo estático de medida, x contiene las variables del estado y $y = Cx$ representa las lecturas de los sensores. Una columna de C indica cómo afecta una variable del estado a todas las lecturas.

Si hay un desplazamiento de calibración, el modelo pasa a ser $y = Cx + d$. Es afín. Al restar el valor de referencia d , la variación de salida vuelve a depender linealmente de x .

3.2 Matriz de una aplicación lineal

Sea $B = (b_1, \dots, b_n)$ una base del dominio y $C = (c_1, \dots, c_m)$ una base del espacio de llegada. La matriz de f en esas bases se construye con las imágenes de los vectores de B , expresadas en C :

$$[f]_{C \leftarrow B} = ([f(b_1)]_C \ \cdots \ [f(b_n)]_C).$$

Si A es la matriz obtenida, se cumple

$$[f(v)]_C = A[v]_B.$$

La columna j contiene las coordenadas de $f(b_j)$ en la base C .

Ejemplo 3.2. De una fórmula a una matriz.

Para $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x + 4y - 2z)$, en bases canónicas:

$$f(e_1) = (1, 2), \quad f(e_2) = (2, 4), \quad f(e_3) = (-1, -2),$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Para la entrada $(1, 1, 0)$, el producto matricial da $A(1, 1, 0)^T = (3, 6)^T$, igual que la fórmula de f .

Ejemplo 3.3. Cuando solo conocemos imágenes de una base.

Sea f una aplicación lineal con $f(1, 1) = (3, 1)$ y $f(1, -1) = (1, -1)$. Los vectores $(1, 1)$ y $(1, -1)$ forman una base B . En base canónica de salida:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matriz M actúa sobre coordenadas en B , no directamente sobre coordenadas canónicas. La matriz canónica es

$$A = MP_B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se comprueba multiplicando $A(1, 1)^T$ y $A(1, -1)^T$.

3.3 Núcleo e imagen

El **núcleo** contiene las entradas que se transforman en cero:

$$\ker(f) = \{v \in V : f(v) = 0\}.$$

La **imagen** contiene todas las salidas que la aplicación puede producir:

$$\operatorname{Im}(f) = \{f(v) : v \in V\}.$$

Ambos son subespacios, del dominio y del espacio de llegada respectivamente.

Para una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ en bases canónicas:

$$\ker(A) = \{x : Ax = 0\}, \quad \operatorname{Im}(A) = \operatorname{span}\{\text{columnas de } A\}.$$

El rango es $\dim \operatorname{Im}(A)$, y el teorema del rango y la nulidad establece

$$\dim \ker(A) + \operatorname{rg}(A) = n.$$

Si $h \in \ker A$, entonces $A(x + h) = Ax$. Por eso, las variaciones de la entrada que pertenecen al núcleo no modifican la salida.

Ejemplo 3.4. Dos salidas que aportan una sola información.

Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, el núcleo se calcula resolviendo $x + 2y - z = 0$. Con $y = s$ y $z = t$:

$$\ker(A) = \operatorname{span}\{(-2, 1, 0), (1, 0, 1)\}.$$

Las columnas son múltiplos de $(1, 2)$, así que

$$\operatorname{Im}(A) = \operatorname{span}\{(1, 2)\}, \quad \operatorname{rg}(A) = 1.$$

Se cumple la relación $2 + 1 = 3$ entre nulidad, rango y dimensión del dominio. La segunda salida siempre vale el doble que la primera. Dos sensores con estas ecuaciones no permiten distinguir las tres componentes de la entrada.

3.3.1 Inyectividad, sobreyectividad e inversa

- f es **inyectiva** si entradas distintas dan salidas distintas. Equivale a $\ker(f) = \{0\}$.
- f es **sobreyectiva** si alcanza todo el espacio de llegada. Equivale a $\text{Im}(f) = W$.
- Si cumple ambas condiciones, es un **isomorfismo** y admite una inversa lineal.

En dimensión finita, para $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$f \text{ inyectiva} \iff \text{rg}(A) = n, \quad f \text{ sobreyectiva} \iff \text{rg}(A) = m.$$

Si $m = n$, las dos condiciones son equivalentes a que A sea invertible. Si $n > m$, la aplicación no puede ser inyectiva; si $m > n$, no puede ser sobreyectiva.

Dos espacios de la misma dimensión sobre el mismo cuerpo son isomorfos. Por ejemplo, asignar a $a + bt + ct^2$ sus coeficientes (a, b, c) identifica $\mathcal{P}_2$ con $\mathbb{R}^3$.

3.4 Operaciones, composición e imágenes de subespacios

Las aplicaciones lineales se pueden sumar y multiplicar por escalares cuando tienen el mismo dominio y espacio de llegada. Las matrices correspondientes se suman o escalan.

Si $f : V \rightarrow W$ y $g : W \rightarrow Z$, su composición es $(g \circ f)(v) = g(f(v))$. En bases compatibles:

$$[g \circ f] = [g][f].$$

El orden del producto es el inverso del orden en que se aplican las transformaciones.

Ejemplo 3.5. Dos etapas de procesamiento.

Sean $f(x, y) = (x + 2y, y)$ y $g(u, v) = (2u, u + v)$. Sus matrices son

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El proceso «primero f , después g » tiene matriz

$$GF = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

En efecto, $g(f(x, y)) = (2x + 4y, x + 3y)$.

Si $U = \text{span}\{u_1, \dots, u_k\}$, entonces

$$f(U) = \text{span}\{f(u_1), \dots, f(u_k)\}.$$

Aunque los generadores de U sean independientes, sus imágenes pueden ser dependientes o nulas. Por tanto, una aplicación lineal puede reducir la dimensión de un subespacio.

Para obtener la **preimagen de un subespacio** $W_0 = \{y : Hy = 0\}$, se impone $HAv = 0$. La notación $f^{-1}(W_0)$ significa «entradas cuya salida pertenece a W_0 »; no exige que exista una aplicación inversa.

3.5 Cambio de bases en una aplicación

Supón que A representa f en unas bases iniciales. Las matrices P y Q reconstruyen las coordenadas antiguas a partir de las nuevas, en el dominio y en la llegada:

$$x_{\text{ant}} = Px_{\text{nuev}}, \quad y_{\text{ant}} = Qy_{\text{nuev}}.$$

Como $y_{\text{ant}} = Ax_{\text{ant}}$, se obtiene

$$A_{\text{nuev}} = Q^{-1}AP.$$

El factor P expresa la entrada en las coordenadas antiguas; A aplica la transformación, y Q^{-1} pasa la salida a las nuevas coordenadas.

Si $f : V \rightarrow V$ es un **endomorfismo** y se cambia a la misma base nueva tanto en la entrada como en la salida, $Q = P$:

$$A_{\text{nuev}} = P^{-1}AP.$$

Las matrices relacionadas de este modo se llaman **semejantes**. Conservan rango, determinante, traza y polinomio característico. Describen la misma transformación en distintas coordenadas.

Ejemplo 3.6. Un cambio simultáneo de entrada y salida.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = ((1, 1), (1, -1))$. Con $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$:

$$A_B = P^{-1}AP = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Para $v = (2, 0)$, sus coordenadas en B son $(1, 1)$. La matriz nueva produce $(2, 2)$ en B , que reconstruye $f(v) = (4, 0)$ mediante $P(2, 2)^T$.

Aplicación. Coordenadas de un modelo de estado.

Un sistema discreto se escribe $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$, $y_k = Cx_k + Du_k$. Si $x_k = Pz_k$, entonces

$$z_{k+1} = P^{-1}APz_k + P^{-1}Bu_k, \quad y_k = CPz_k + Du_k.$$

El cambio modifica las matrices, pero mantiene las relaciones entre entradas y salidas. Una buena base puede separar modos de evolución o simplificar los cálculos.

3.6 Algoritmos de cálculo

Algoritmo. Construir la matriz y estudiar núcleo e imagen.

Entrada: una aplicación lineal f , base B del dominio y base C de la llegada.

Para $j = 1, \dots, n$:

Calcular $f(b_j)$ y obtener $a_j = [f(b_j)]_C$.

$A \leftarrow (a_1 \cdots a_n)$.

Base del núcleo $\leftarrow$ resolver $Ax = 0$.

Base de la imagen $\leftarrow$ columnas originales de A con pivote.

$r \leftarrow \text{rg}(A)$.

Injectiva $\leftarrow (r = n)$; sobreyectiva $\leftarrow (r = m)$.

Devolver A , bases y clasificación.

Las bases calculadas están expresadas en coordenadas. Para escribir sus vectores en los espacios originales, se usan las bases B y C , respectivamente. La suma de la nulidad y el rango debe ser n .

Algoritmo. Cambiar la matriz de una aplicación.

Entrada: matriz antigua A y matrices de cambio P y Q .

$M \leftarrow AP$.

Para cada columna m_j de M :

 Resolver $Qz_j = m_j$.

$A_{\text{nuev}} \leftarrow (z_1 \ \cdots \ z_n)$.

Devolver A_{nuev} .

Resolver los sistemas por columnas equivale a calcular $Q^{-1}AP$. En un cambio por semejanza se toma $Q = P$. El resultado debe cumplir $QA_{\text{nuev}} = AP$.

3.7 Ejercicios

- 3.1.** Estudia si son lineales $f(x, y) = (3x - y, x + 2y)$, $g(x, y) = (x^2, y)$ y $h(x, y) = (x + 1, y)$. Da la matriz cuando proceda.
- 3.2.** Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, calcula bases del núcleo y la imagen. Decide si la aplicación $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es inyectiva o sobreyectiva.
- 3.3.** La derivación $D : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_1$ asigna $D(p) = p'$. Escribe su matriz en las bases $(1, t, t^2)$ y $(1, t)$. Calcula núcleo e imagen.
- 3.4.** Sean $f(x, y) = (x + y, y)$ y $g(x, y) = (2x, y - x)$. Calcula las matrices de $g \circ f$ y $f \circ g$.
- 3.5.** Una aplicación lineal cumple $f(1, 1) = (3, 1)$ y $f(1, -1) = (1, -1)$. Obtén su matriz canónica y calcula $f(2, 3)$.
- 3.6.** Expresa $A = \text{diag}(2, 1)$ en la base $B = ((1, 1), (1, -1))$. Verifica $AP = PA_B$.
- 3.7.** Sea $f(x, y, z) = (x + y, z)$ y $W = \text{span}\{(1, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Calcula $f^{-1}(W)$ y su dimensión.
- 3.8.** Una matriz de medida es $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. ¿Qué variaciones del estado pasan inadvertidas? ¿Cuántas componentes independientes de la salida se obtienen?

Tema 4

Autovalores, diagonalización y Jordan

4.1 Autovalores y autovectores

Sea A una matriz cuadrada. Un vector $v \neq 0$ es un **autovector** de A si existe un escalar λ tal que

$$Av = \lambda v.$$

El escalar λ se llama **autovalor**. La recta generada por v es invariante, y sobre ella la transformación equivale a multiplicar por λ . Si $\lambda = 0$, el vector pertenece al núcleo; si $\lambda < 0$ es real, la imagen tiene sentido contrario.

Para calcular los autovalores se escribe $(A - \lambda I)v = 0$. La existencia de una solución no nula exige que la matriz sea singular:

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0.$$

Se llama **polinomio característico**. Usar $\det(A - \lambda I)$ cambia, a lo sumo, un signo global y da las mismas raíces. Fijaremos la primera convención.

Ejemplo 4.1. Dos modos de una transformación.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Se obtiene

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2 - 1 = (\lambda - 3)(\lambda - 1).$$

Para $\lambda = 3$, resolver $(A - 3I)v = 0$ da $x = y$: los autovectores son los múltiplos no nulos de $(1, 1)$. Para $\lambda = 1$, resulta $x = -y$: son los múltiplos no nulos de $(1, -1)$.

Así, una componente común a las dos entradas se multiplica por tres y una componente de diferencia se conserva. Basta comprobar $A(1, 1)^T = 3(1, 1)^T$ y $A(1, -1)^T = (1, -1)^T$.

El **autoespacio** de λ es $E_\lambda = \ker(A - \lambda I)$ e incluye el cero. Un autovector nunca es cero. Los autovectores asociados a autovalores distintos son linealmente independientes.

Los autovalores de una matriz triangular son sus entradas diagonales. Además, contando multiplicidades sobre $\mathbb{C}$,

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{j=1}^n \lambda_j, \quad \det(A) = \prod_{j=1}^n \lambda_j.$$

La suma y el producto de las raíces deben coincidir, respectivamente, con la traza y el determinante.

4.2 Diagonalización

Una matriz A es **diagonalizable sobre $\mathbb{K}$** si existe una base de autovectores con componentes en $\mathbb{K}$. Al reunirlos como columnas de P y ordenar sus autovalores del mismo modo:

$$AP = PD, \quad A = PDP^{-1}, \quad D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Cada columna de $AP = PD$ expresa una ecuación de autovector.

La **multiplicidad algebraica** $m_a(\lambda)$ es el número de veces que λ aparece como raíz del polinomio característico. La **multiplicidad geométrica** $m_g(\lambda)$ es $\dim E_\lambda$. Siempre se cumple

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda).$$

Criterio completo de diagonalización.

A es diagonalizable sobre $\mathbb{K}$ si su polinomio característico se descompone en factores lineales sobre $\mathbb{K}$ y $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$ para cada autovalor.

Si tiene n autovalores distintos en $\mathbb{K}$, es diagonalizable. Si un autovalor es repetido, hay que calcular la dimensión de su autoespacio para decidir si la matriz es diagonalizable.

Ejemplo 4.2. La misma multiplicidad, dos comportamientos.

Las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

tienen polinomio $(\lambda - 2)^2$. Para A_1 , el autoespacio es todo $\mathbb{R}^2$, de dimensión dos. Para A_2 , la ecuación $(A_2 - 2I)v = 0$ impone $y = 0$: su dimensión es uno. La primera es diagonalizable y la segunda no.

4.2.1 Diagonalización sobre $\mathbb{R}$ y sobre $\mathbb{C}$

La matriz $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ gira el plano un cuarto de vuelta. Su polinomio es $\lambda^2 + 1$, sin raíces reales. No es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$. Sobre $\mathbb{C}$ tiene autovalores i y $-i$, distintos, y sí se diagonaliza. El apéndice A repasa las operaciones con complejos.

4.3 Subespacios invariantes

Un subespacio U es **invariante** por A si $Au \in U$ para todo $u \in U$. Para comprobarlo basta aplicar A a los vectores de una base de U y comprobar que sus imágenes pertenecen a U .

Si M contiene una base de U , la condición se expresa como

$$AM = MH$$

para alguna matriz cuadrada H . Esa matriz representa la acción de A dentro de U . Cada autoespacio es invariante. Si todo el espacio se descompone como suma directa de subespacios invariantes, la matriz en las bases reunidas queda formada por bloques diagonales.

Ejemplo 4.3. Una dirección conservada.

Para $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, el eje x es invariante porque $A(x, 0)^T = (2x, 0)^T$. El eje y no lo es: $A(0, 1)^T = (1, 2)^T$ sale de él.

4.4 Forma de Jordan

Si el polinomio característico se descompone en factores lineales, siempre existe una base que lleva A a una **forma de Jordan**. Sobre $\mathbb{C}$, esta condición se cumple para toda matriz cuadrada. Sobre $\mathbb{R}$ se requiere que todos los autovalores sean reales.

Un bloque de tamaño s es

$$J_s(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Cuando $s = 1$, el bloque es simplemente (λ) . Una matriz diagonal es una forma de Jordan en la que todos los bloques tienen tamaño uno.

Para un autovalor fijo, escribimos $N = A - \lambda I$. Una **cadena de Jordan** de longitud s consta de vectores que cumplen

$$Nv_1 = 0, \quad Nv_2 = v_1, \quad \dots, \quad Nv_s = v_{s-1}.$$

El primer vector es un autovector; los siguientes son autovectores generalizados. Con este orden de columnas se obtiene el bloque con unos **encima** de la diagonal.

Ejemplo 4.4. Construir una cadena de longitud dos.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $N = A - 2I$. Elegimos $v_1 = (3, 0)$, que cumple $Nv_1 = 0$. Para hallar v_2 resolvemos $Nv_2 = v_1$: sirve $v_2 = (0, 1)$.

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad AP = PJ.$$

Así se obtiene $A = PJP^{-1}$. En este ejemplo basta elegir v_1 y resolver $Nv_2 = v_1$. Para cadenas más largas, la elección de v_1 debe permitir que los sistemas siguientes sean compatibles.

4.4.1 Contar los bloques mediante núcleos

Para un autovalor λ , definimos

$$K_s = \ker(A - \lambda I)^s, \quad d_s = \dim K_s, \quad d_0 = 0.$$

Cuando las dimensiones se estabilizan, su valor es $m_a(\lambda)$. Si ℓ es el primer índice con $d_\ell = d_{\ell+1}$, el mayor bloque de λ tiene tamaño ℓ .

La diferencia $d_s - d_{s-1}$ cuenta los bloques de tamaño **al menos** s . Por tanto,

$$\text{bloques de tamaño exactamente } s = 2d_s - d_{s-1} - d_{s+1}.$$

Se toma $d_{\ell+1} = d_\ell$. En particular, $d_1 = m_g(\lambda)$ es el número total de bloques de ese autovalor.

Ejemplo 4.5. Decidir entre las formas de tamaño tres.

Si un único autovalor λ tiene multiplicidad algebraica tres, hay estas posibilidades:

d_1	d_2	Bloques
3	3	$1 + 1 + 1$
2	3	$2 + 1$
1	2	3

Por ejemplo, $d_1 = 2$ significa que hay dos bloques. Como deben ocupar tres posiciones, sus tamaños son dos y uno.

4.5 Potencias de matrices

Si $A = PDP^{-1}$, las potencias intermedias de P se cancelan y

$$A^k = PD^kP^{-1}, \quad D^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k), \quad k \geq 0.$$

En un bloque $J = \lambda I + N$, con $N^s = 0$, se puede aplicar el binomio de Newton porque λI y N conmutan:

$$J^k = \sum_{r=0}^{\min(k, s-1)} \binom{k}{r} \lambda^{k-r} N^r.$$

Se entiende $J^0 = I$ y, en esta fórmula polinómica, $0^0 = 1$. Así también se cubre el caso $\lambda = 0$, sin introducir potencias negativas.

Ejemplo 4.6. Una potencia con acoplamiento.

Para $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, con $N^2 = 0$,

$$J^k = \begin{pmatrix} 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}, \quad k \geq 1.$$

El factor k aparece por la cadena de Jordan. Si el autovalor es cero, el bloque $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tiene cuadrado cero y todas sus potencias desde la segunda son nulas.

Aplicación. Modos de un sistema discreto.

En un sistema sin entrada, $x_{k+1} = Ax_k$ implica $x_k = A^k x_0$. Si $A = PDP^{-1}$ y $x_k = Pz_k$, cada coordenada satisface

$$z_{j,k+1} = \lambda_j z_{j,k}.$$

Un modo con $|\lambda_j| < 1$ decae; si $|\lambda_j| > 1$, puede crecer. Si $|\lambda_j| = 1$, los bloques de Jordan requieren atención: pueden introducir factores como k .

Por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}$ tiene modos $(1, 1)$ y $(1, -1)$, con autovalores 0.9 y 0.7. Ambos decaen. Desde $x_0 = (1, 0)$:

$$x_k = \frac{1}{2} 0.9^k (1, 1)^T + \frac{1}{2} 0.7^k (1, -1)^T.$$

Para que $A^k x_0 \rightarrow 0$ para **todo** estado inicial, el criterio exacto es que todos los autovalores tengan módulo menor que uno.

4.6 Algoritmos de cálculo

Algoritmo. Autovalores y diagonalización.

Entrada: matriz cuadrada A de orden n y cuerpo $\mathbb{K}$.

Calcular y factorizar $p_A(t) = \det(tI - A)$.

Si no se descompone en factores lineales en $\mathbb{K}$:

Devolver «no es diagonalizable sobre $\mathbb{K}$ ».

Lista de vectores $B \leftarrow \emptyset$; lista de valores $L \leftarrow \emptyset$.

Para cada autovalor distinto λ :

Obtener una base de $\ker(A - \lambda I)$ por Gauss.

Si su tamaño es menor que $m_a(\lambda)$:

Devolver «no es diagonalizable».

Añadir esa base a B y repetir λ en L por cada vector.

$P \leftarrow$ columnas de B ; $D \leftarrow \text{diag}(L)$.

Devolver P y D .

Se reúnen las bases de los autoespacios hasta obtener n autovectores independientes. Sus autovalores se colocan en D en el mismo orden. Se comprueban $\text{rg}(P) = n$ y $AP = PD$.

Algoritmo. Tamaños de los bloques de Jordan.

Entrada: matriz A y un autovalor λ .

$N \leftarrow A - \lambda I$; $d_0 \leftarrow 0$; $s \leftarrow 1$.

Calcular $d_s \leftarrow n - \text{rg}(N^s)$.

Mientras $d_s < m_a(\lambda)$:

$s \leftarrow s + 1$ y calcular d_s .

$\ell \leftarrow s$; $d_{\ell+1} \leftarrow d_\ell$.

Para $s = 1, \dots, \ell$:

$b_s \leftarrow 2d_s - d_{s-1} - d_{s+1}$.

Devolver b_s bloques de tamaño s , para cada s .

Las diferencias entre dimensiones sucesivas permiten contar los bloques de cada tamaño. Deben cumplirse $\sum_s b_s = d_1$ y $\sum_s s b_s = m_a(\lambda)$. El algoritmo determina los tamaños de los bloques; la matriz P se construye a continuación.

Algoritmo. Construir una base de Jordan.

Entrada: A cuyo polinomio se descompone en factores lineales sobre $\mathbb{K}$.

Lista de columnas $B \leftarrow \emptyset$; lista de bloques $L \leftarrow \emptyset$.

Para cada autovalor λ :

$N \leftarrow A - \lambda I$; calcular ℓ con el algoritmo anterior.

Obtener bases de $K_s = \ker N^s$, para $s = 1, \dots, \ell$.

$K_0 \leftarrow \{0\}$; $K_{\ell+1} \leftarrow K_\ell$.

Para $s = \ell, \ell - 1, \dots, 1$:

Extraer una base S de $K_{s-1} + N(K_{s+1})$.

Completar S hasta una base de K_s .

Para cada vector añadido w :

Añadir a B la cadena $(N^{s-1}w, \dots, Nw, w)$.

Añadir $J_s(\lambda)$ a L .

$P \leftarrow$ columnas de B ; $J \leftarrow$ bloques de L en la diagonal.

Devolver P y J .

Los vectores de K_{s-1} solo alcanzan cadenas más cortas; los de $N(K_{s+1})$ provienen de cadenas más largas. Al completar su suma dentro de K_s , se seleccionan los extremos que aportan bloques de longitud exactamente s .

La operación «completar» se realiza añadiendo vectores de una base de K_s cuando aumentan el rango. Para obtener $N(K_{s+1})$, se aplica N a una base de K_{s+1} y se eliminan resultados redundantes. Al reunir las cadenas se deben obtener $\text{rg}(P) = n$ y $AP = PJ$. En ejercicios pequeños puede construirse cada cadena mediante sistemas $Nv_{j+1} = v_j$, siempre comprobando que son compatibles.

Algoritmo. Potencia de una matriz.

Entrada: $A = PJP^{-1}$ y entero $k \geq 0$; se admite $J = D$ diagonal.

Si $k = 0$: **devolver** I .

Para cada bloque $J_s(\lambda)$ de J :

$N \leftarrow J_s(\lambda) - \lambda I_s$.

$H \leftarrow \sum_{r=0}^{\min(k, s-1)} \binom{k}{r} \lambda^{k-r} N^r$.

Colocar H en el bloque correspondiente de J^k .

Devolver PJ^kP^{-1} .

En cada bloque solo intervienen las potencias de λ y las primeras potencias de la matriz nilpotente. Los casos $k = 1$ y $k = 2$ permiten comprobar la fórmula.

4.7 Ejercicios

4.1. Diagonaliza $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y calcula A^3 .

4.2. Decide cuáles son diagonalizables sobre $\mathbb{R}$: $\text{diag}(2, 2)$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Repite la última sobre $\mathbb{C}$.

4.3. Calcula autovalores y una base de cada autoespacio de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Construye P y D .

4.4. Obtén una base de Jordan para $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y una fórmula para A^k , $k \geq 1$.

4.5. Un autovalor tiene multiplicidad algebraica seis y $d_1 = 3$, $d_2 = 5$, $d_3 = 6$. Determina sus bloques de Jordan.

4.6. Para $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, calcula N^2 , N^3 y los núcleos de N , N^2 y N^3 .

4.7. Estudia si todos los estados iniciales de $x_{k+1} = Ax_k$ convergen a cero para $A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}$. Calcula x_k desde $x_0 = (1, 0)$.

4.8. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Comprueba que $U = \text{span}\{(1, 0)\}$ es invariante. Calcula $A^k(0, 1)^T$ y explica por qué el autovalor uno no garantiza estados acotados.

Tema 5

Producto escalar, proyecciones y ajuste de datos

5.1 Producto escalar y matriz de Gram

Un **producto escalar real** asigna un número $\langle u, v \rangle$ a dos vectores. Es bilineal, simétrico y definido positivo:

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle, \quad \langle v, v \rangle > 0 \quad \text{si } v \neq 0.$$

La bilinealidad permite distribuir sumas y extraer escalares en cada entrada. En $\mathbb{R}^n$, el producto usual es

$$\langle u, v \rangle = u^\top v = \sum_{j=1}^n u_j v_j.$$

En una base B , cualquier producto escalar real se representa como

$$\langle u, v \rangle = [u]_B^\top G_B [v]_B, \quad (G_B)_{ij} = \langle b_i, b_j \rangle.$$

Esta **matriz de Gram** G_B es simétrica y definida positiva. Si las columnas de P representan una base nueva en la antigua:

$$G_{\text{nueva}} = P^\top G_{\text{antigua}} P.$$

En particular, si el producto antiguo es el usual y la base antigua es la canónica, $G_{\text{nueva}} = P^\top P$.

Ejemplo 5.1. Las coordenadas no siempre usan el producto usual.

En la base $B = ((1, 0), (1, 1))$ del plano euclídeo,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_B = P^\top P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Los vectores de coordenadas $(1, 0)$ y $(0, 1)$ corresponden a $(1, 0)$ y $(1, 1)$: su producto es uno, no cero. Para calcular el producto a partir de estas coordenadas hay que usar G_B , pues la base no es ortonormal.

También pueden definirse productos ponderados, como $\langle u, v \rangle_G = u^\top G v$ con $G = \text{diag}(2, 1)$. La primera componente tiene mayor peso. Una matriz simétrica que no sea definida positiva no sirve para definir un producto escalar.

5.2 Norma, distancia y ángulo

La longitud asociada al producto escalar es

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}, \quad d(u, v) = \|u - v\|.$$

La norma solo es cero para el vector cero y cumple $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$. Las desigualdades básicas son

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\| \quad (\text{Cauchy-Schwarz}), \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad (\text{triangular}).$$

Para vectores **no nulos**, el ángulo $\theta \in [0, \pi]$ se obtiene de

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}.$$

Dos vectores son **ortogonales** si su producto es cero. Cuando $u \perp v$, se cumple $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

Ejemplo 5.2. Longitud y ángulo.

Para $u = (1, 1, 0)$ y $v = (1, 0, 1)$, usando el producto usual, $\langle u, v \rangle = 1$ y ambas normas son $\sqrt{2}$. Por tanto $\cos \theta = 1/2$ y $\theta = \pi/3$. Su distancia es $\|(0, 1, -1)\| = \sqrt{2}$.

5.3 Bases ortonormales y Gram-Schmidt

Una familia de vectores no nulos y mutuamente ortogonales es linealmente independiente. Si, además, todos tienen norma uno, es **ortonormal**. En una base ortonormal $(q_1, \dots, q_n)$:

$$v = \sum_{j=1}^n \langle q_j, v \rangle q_j.$$

Las coordenadas se obtienen con productos escalares. En el producto usual, la matriz Q de una base ortonormal satisface $Q^T Q = I$ y $Q^{-1} = Q^T$.

El proceso de **Gram-Schmidt** obtiene una base ortonormal a partir de una base cualquiera. A cada vector se le restan sus proyecciones sobre los vectores ya ortonormalizados:

$$w_j = v_j - \sum_{i < j} \langle q_i, v_j \rangle q_i, \quad q_j = \frac{w_j}{\|w_j\|}.$$

Si la familia inicial es independiente, $w_j \neq 0$ en cada paso. Si contiene redundancias, los residuos nulos se descartan.

Ejemplo 5.3. Dos vectores de un plano.

Partimos de $v_1 = (1, 1, 0)$ y $v_2 = (1, 0, 1)$. Primero,

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0).$$

Después,

$$w_2 = v_2 - \langle q_1, v_2 \rangle q_1 = (1, 0, 1) - \frac{1}{2}(1, 1, 0) = \frac{1}{2}(1, -1, 2).$$

Como $\|w_2\| = \sqrt{6}/2$, resulta

$$q_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2).$$

Ambos tienen norma uno, su producto es cero y generan el mismo plano que los vectores iniciales.

5.4 Complemento ortogonal y proyección

Para un subespacio U , su **complemento ortogonal** es

$$U^\perp = \{w : \langle u, w \rangle = 0 \text{ para todo } u \in U\}.$$

En dimensión finita, $V = U \oplus U^\perp$ y $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$. Cada vector se descompone de forma única como

$$v = p + r, \quad p \in U, \quad r \in U^\perp.$$

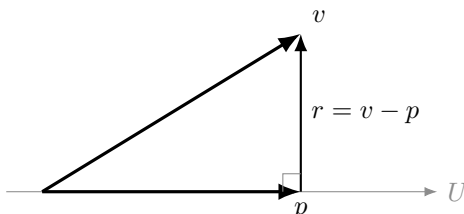
El vector p es la **proyección ortogonal** de v sobre U .

Con una base ortonormal $(q_1, \dots, q_r)$ de U :

$$\text{proj}_U(v) = \sum_{j=1}^r \langle q_j, v \rangle q_j.$$

Sobre una recta generada por un vector $u \neq 0$, no necesariamente unitario:

$$\text{proj}_{\text{span}\{u\}}(v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u.$$



Ejemplo 5.4. El punto más cercano de un plano.

Sea $U = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$ y $v = (2, 1, 0)$. El vector $n = (1, 1, 1)$ es normal al plano. Primero se obtiene la parte perpendicular:

$$r = \frac{v^\top n}{n^\top n} n = \frac{3}{3} (1, 1, 1) = (1, 1, 1).$$

Por tanto, $p = v - r = (1, 0, -1)$. Se comprueba que $p \in U$ y que r es perpendicular a todos los vectores de U . La distancia de v a U es $\|r\| = \sqrt{3}$.

5.4.1 La matriz de una proyección

Para el producto usual, si las columnas de Q son una base ortonormal de U :

$$\Pi_U = QQ^\top.$$

Si las columnas de M son una base cualquiera de U :

$$\Pi_U = M(M^\top M)^{-1} M^\top.$$

La independencia de las columnas garantiza que $M^\top M$ es invertible. Si son generadores dependientes, se extrae primero una base.

La matriz de una proyección ortogonal cumple $\Pi_U^2 = \Pi_U$ y $\Pi_U^\top = \Pi_U$. La primera igualdad expresa que la proyección deja fijos los vectores de U ; la segunda, que la matriz es simétrica. Su imagen es U y su núcleo $U^\perp$.

Si el producto se define mediante G , en lugar del producto usual, la fórmula pasa a ser

$$\Pi_U = M(M^\top G M)^{-1} M^\top G.$$

En ese caso puede no ser simétrica en el sentido usual, pero cumple $\Pi_U^\top G = G \Pi_U$.

5.4.2 Por qué la proyección minimiza la distancia

Para cualquier $u \in U$, se tiene $v - u = r + (p - u)$ con componentes ortogonales. Por Pitágoras:

$$\|v - u\|^2 = \|r\|^2 + \|p - u\|^2 \geq \|r\|^2.$$

La igualdad se alcanza únicamente cuando $u = p$. Así,

$$d(v, U) = \|v - \text{proj}_U(v)\|.$$

Para un conjunto afín $a + U$, se proyecta primero $v - a$ sobre U y se suma a al resultado.

5.5 Mínimos cuadrados

Si $Ax = b$ no tiene solución, el método de mínimos cuadrados busca un vector $\hat{x}$ que minimice

$$\|Ax - b\|^2.$$

El vector $A\hat{x}$ es la proyección de b sobre el espacio de columnas de A . El residuo $r = b - A\hat{x}$ debe ser ortogonal a cada columna:

$$A^T r = 0 \iff A^T A \hat{x} = A^T b.$$

Estas son las **ecuaciones normales**.

Existencia y unicidad.

Las ecuaciones normales siempre tienen solución. Si A tiene columnas independientes, $A^T A$ es invertible y el minimizador es único:

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b.$$

Si las columnas son dependientes, hay varios minimizadores: a uno se le puede sumar cualquier vector de $\ker A$. Todos producen la misma salida ajustada $A\hat{x}$ y el mismo residuo.

Ejemplo 5.5. Tres medidas y dos incógnitas.

Intentamos resolver $x = 1$, $y = 2$, $x + y = 4$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Las dos primeras ecuaciones darían $x + y = 3$, de modo que el sistema es incompatible. Las ecuaciones normales son

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Se obtiene $(\hat{x}, \hat{y}) = (4/3, 7/3)$. El residuo es

$$r = (-1/3, -1/3, 1/3)^T, \quad A^T r = (0, 0)^T.$$

El error mínimo al cuadrado es $\|r\|^2 = 1/3$. Ninguna otra elección de las dos incógnitas produce una suma de cuadrados menor.

5.5.1 Ajustar una recta a datos

Para datos (t_i, y_i) , un modelo $y \approx a + bt$ conduce a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_m \end{pmatrix}, \quad x = (a, b)^T, \quad y = (y_1, \dots, y_m)^T.$$

Las ecuaciones normales quedan

$$\begin{pmatrix} m & \sum t_i \\ \sum t_i & \sum t_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum t_i y_i \end{pmatrix}.$$

Hay un ajuste único si los t_i no son todos iguales.

Aplicación. Calibrar un sensor.

Las medidas $(0, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, 2)$ no están exactamente alineadas. El ajuste $y \approx a + bt$ satisface

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad a = \frac{7}{6}, \quad b = \frac{1}{2}.$$

La recta estima una salida de $7/6$ en la referencia $t = 0$ y un incremento de $1/2$ por unidad de entrada. Los residuos son $(-1/6, 1/3, -1/6)$ y el error al cuadrado es $1/6$. El ajuste resume estas medidas; su utilidad fuera del intervalo medido depende del modelo físico.

5.5.2 Factorización QR

Si A tiene n columnas independientes, Gram-Schmidt permite escribir

$$A = QR, \quad Q^T Q = I_n,$$

donde Q tiene columnas ortonormales y R es triangular superior invertible. Entonces el mínimo se obtiene resolviendo

$$R\hat{x} = Q^T b.$$

Este procedimiento evita formar $A^T A$. En cálculo numérico suele ser preferible a las ecuaciones normales; las implementaciones emplean algoritmos estables de factorización QR.

5.6 Algoritmos de cálculo

Algoritmo. Gram-Schmidt con normalización.

Entrada: vectores $v_1, \dots, v_k$ y producto escalar elegido.

Lista $B \leftarrow \emptyset$.

Para $j = 1, \dots, k$:

$w \leftarrow v_j$.

Para cada q de B :

$w \leftarrow w - \langle q, w \rangle q$.

Si $\|w\| \neq 0$: añadir $w/\|w\|$ a B .

Devolver B .

Se restan las proyecciones sobre los vectores ya obtenidos. Si el residuo es cero, el vector inicial era dependiente de los anteriores. Para un producto de matriz G se calcula $q^T G w$. La familia obtenida debe ser ortonormal y generar el espacio inicial. Con números decimales, se compara la norma con una tolerancia.

Algoritmo. Proyección y distancia a un subespacio.

Entrada: vector v , base de U y producto escalar.

Obtener una base ortonormal $(q_1, \dots, q_r)$ por Gram-Schmidt.

$p \leftarrow 0$.

Para $j = 1, \dots, r$:

$p \leftarrow p + \langle q_j, v \rangle q_j$.

$e \leftarrow v - p$; $d \leftarrow \|e\|$.

Devolver p , e y d .

La suma de proyecciones proporciona la componente de v en U . Si $U = \{0\}$, la suma es vacía y $p = 0$. Deben cumplirse $p \in U$ y $\langle q_j, e \rangle = 0$ para todos los vectores de la base.

Algoritmo. Mínimos cuadrados por ecuaciones normales.

Entrada: matriz real A y vector b , con tamaños compatibles.

$H \leftarrow A^T A$; $c \leftarrow A^T b$.

Resolver $Hx = c$ mediante Gauss.

Elegir una solución $\hat{x}$.

$r \leftarrow b - A\hat{x}$.

Devolver $\hat{x}$, $A\hat{x}$, r y $\|r\|^2$.

Las ecuaciones normales hacen que el residuo sea perpendicular a las columnas de A . Si aparecen variables libres, los minimizadores se describen sumando $\ker A$ a una solución particular. En todos los casos debe cumplirse $A^T r = 0$. Para datos decimales sensibles, se prefiere QR.

Algoritmo. QR y mínimos cuadrados con columnas independientes.

Entrada: $A = (a_1 \cdots a_n)$ con rango n y vector b .

$R \leftarrow 0$.

Para $j = 1, \dots, n$:

$w \leftarrow a_j$.

Para $i = 1, \dots, j-1$:

$r_{ij} \leftarrow q_i^T w$; $w \leftarrow w - r_{ij} q_i$.

$r_{jj} \leftarrow \|w\|$; $q_j \leftarrow w/r_{jj}$.

$Q \leftarrow (q_1 \cdots q_n)$; $c \leftarrow Q^T b$.

Resolver $R\hat{x} = c$ por sustitución hacia atrás.

Devolver Q , R y $\hat{x}$.

Los coeficientes de las proyecciones y las normas de los residuos se guardan en R . Como las columnas son independientes, $r_{jj} \neq 0$ en cálculo exacto. Se verifican $A = QR$, $Q^T Q = I$ y $A^T(b - A\hat{x}) = 0$.

5.7 Ejercicios

- 5.1.** Para $u = (1, 1, 0)$ y $v = (1, 0, 1)$, calcula producto, normas, distancia y ángulo con el producto usual.
- 5.2.** Aplica Gram-Schmidt a $v_1 = (1, 1, 0)$ y $v_2 = (1, 0, 1)$. Verifica la ortonormalidad.
- 5.3.** Obtén la proyección de $(3, 1)$ sobre la recta $\text{span}\{(1, 1)\}$ y la distancia a ella.
- 5.4.** Para $U = \{x + y + z = 0\}$, calcula la matriz de proyección ortogonal y proyecta $(2, 1, 0)$. Verifica $\Pi^2 = \Pi$.
- 5.5.** Resuelve por mínimos cuadrados $x = 1$, $y = 2$, $x + y = 4$. Comprueba la ortogonalidad del residuo.
- 5.6.** Ajusta $y = a + bt$ a $(0, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, 2)$. Calcula las predicciones y la suma de cuadrados de los residuos.
- 5.7.** Con $\langle u, v \rangle_G = u^\top G v$ y $G = \text{diag}(2, 1)$, proyecta $(1, 0)$ sobre $\text{span}\{(1, 1)\}$. Calcula la distancia usando este producto.
- 5.8.** Obtén una factorización QR reducida de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Usa R para ajustar $Ax \approx (1, 2, 0)^\top$.

Tema 6

Matrices simétricas y transformaciones ortogonales

6.1 Diagonalización de matrices simétricas

Una matriz real A es simétrica si $A^T = A$. El **teorema espectral** asegura:

- Todos sus autovalores son reales.
- Los autoespacios de autovalores distintos son ortogonales.
- Existe una base ortonormal de autovectores.

Por tanto, se puede elegir una matriz ortogonal Q tal que

$$Q^T A Q = D, \quad A = Q D Q^T, \quad Q^T Q = I.$$

Si un autovalor es repetido, se ortonormaliza una base de su autoespacio. Todos los bloques de Jordan tienen, por tanto, tamaño uno.

Ejemplo 6.1. Diagonalizar conservando la geometría.

Para $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, los autovectores $(1, 1)$ y $(1, -1)$ son ortogonales. Al normalizar:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se verifica $Q^T Q = I$ y $AQ = QD$. En estas coordenadas la transformación estira una dirección por un factor tres y conserva la dirección perpendicular.

Si se trabaja con un producto escalar de matriz G , la condición de que el endomorfismo sea simétrico respecto de ese producto es

$$A^T G = G A.$$

La matriz puede no ser simétrica en una base cualquiera. En una base ortonormal para ese producto sí lo es. La condición de simetría depende así del producto escalar y de la base en la que se escribe la matriz.

6.2 Formas cuadráticas y signo

Una expresión cuadrática se representa como

$$q(x) = x^T A x$$

con A simétrica. Los términos cruzados se reparten entre dos entradas: $ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$ corresponde a $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

Si $x = Qz$ y $Q^T A Q = D$, entonces

$$q(x) = \lambda_1 z_1^2 + \cdots + \lambda_n z_n^2.$$

La clasificación de la forma cuadrática depende del signo de los autovalores:

Autovalores	Tipo de forma
Todos positivos	Definida positiva: $q(x) > 0$ para $x \neq 0$.
Todos negativos	Definida negativa.
No negativos, con alguno cero	Semidefinida positiva, no definida.
No positivos, con alguno cero	Semidefinida negativa, no definida.
Hay positivos y negativos	Indefinida.

La forma cero es semidefinida positiva y negativa. Para una matriz simétrica real, también puede comprobarse la positividad con el **criterio de Sylvester**: todos los menores principales iniciales, de órdenes $1, \dots, n$, deben ser positivos.

Aplicación. Una medida de energía.

Un modelo cuadrático $E(x) = \frac{1}{2}x^T H x$ con H simétrica definida positiva asigna energía positiva a todo estado no nulo. En coordenadas ortonormales de autovectores:

$$E(x) = \frac{1}{2} \sum_j \lambda_j z_j^2.$$

Para $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, los pesos son tres y uno. Cambiar de coordenadas elimina el término cruzado, pero conserva el valor de la energía.

6.3 Transformaciones ortogonales

Una matriz real cuadrada Q es **ortogonal** si

$$Q^T Q = I.$$

Sus columnas forman una base ortonormal y $Q^{-1} = Q^T$. Conserva el producto usual:

$$(Qu)^T (Qv) = u^T v.$$

Por tanto, conserva normas, distancias y ángulos. Además, $\det Q = \pm 1$. El signo distingue si conserva o invierte la orientación.

La inversa y el producto de matrices ortogonales son ortogonales. Sus autovalores, considerados sobre $\mathbb{C}$, tienen módulo uno. Si un autovalor es real, vale 1 o -1 .

Simetría y ortogonalidad.

Ser simétrica no equivale a ser ortogonal. La matriz $\text{diag}(2, 1)$ es simétrica y duplica la longitud de los vectores del eje x . La matriz de un giro de ángulo $\pi/3$ es ortogonal y no es simétrica.

Para un producto de matriz G , conservar la geometría exige $Q^T G Q = G$. La condición $Q^T Q = I$ corresponde al producto usual en coordenadas canónicas o en una base ortonormal.

6.4 Giros y reflexiones en el plano

Un giro de ángulo θ en sentido antihorario tiene matriz

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Cumple $\det R_\theta = 1$ y $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$. La composición suma ángulos: $R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta}$.

Una reflexión respecto de una recta que pasa por el origen conserva esa recta y cambia el signo de su perpendicular. Si u es un vector unitario del eje:

$$S = 2uu^T - I.$$

Sus autovalores son 1 en el eje y -1 en la perpendicular. El determinante es -1 .

Ejemplo 6.2. Reflejar respecto de la diagonal.

Para la recta $y = x$, usamos $u = (1, 1)^T/\sqrt{2}$:

$$S = 2uu^T - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, $S(x, y)^T = (y, x)^T$. La reflexión intercambia las coordenadas, tiene $S^2 = I$ y conserva la norma.

Toda matriz ortogonal real 2×2 es un giro si su determinante es uno, y una reflexión si es menos uno. La identidad es el giro de ángulo cero.

6.5 Giros y reflexiones en el espacio

Un giro en $\mathbb{R}^3$ conserva un eje. En una base ortonormal cuyo primer vector sigue ese eje, su matriz es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Tiene determinante uno. El eje se encuentra resolviendo $(Q - I)v = 0$. Para un giro distinto de la identidad, este núcleo es una recta. El ángulo en $[0, \pi]$ satisface

$$\cos \theta = \frac{\text{tr } Q - 1}{2}.$$

Para fijar un ángulo con signo, también hay que orientar el eje y la base del plano perpendicular.

Una reflexión respecto de un plano por el origen, de normal unitaria n , tiene matriz

$$S = I - 2nn^T.$$

Conserva el plano $n^\perp$ y cambia el signo de la dirección n .

Ejemplo 6.3. Dos transformaciones espaciales.

El giro de un cuarto de vuelta alrededor del eje z es

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Su eje es $\text{span}\{(0, 0, 1)\}$, su traza es uno y el ángulo es $\pi/2$. La reflexión respecto del plano $z = 0$ es $\text{diag}(1, 1, -1)$ y transforma (x, y, z) en $(x, y, -z)$.

Una matriz ortogonal 3×3 de determinante -1 admite una dirección con autovalor -1 . En el plano perpendicular actúa como un giro. En una base adaptada queda

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \cos \theta = \frac{\text{tr } Q + 1}{2}.$$

Para $\theta = 0$ es una reflexión respecto de un plano. Para $\theta = \pi$ es $-I$, la inversión respecto del origen. Para otros ángulos combina un giro con la reflexión respecto del plano perpendicular al eje.

Aplicación. Cambiar la orientación de un sensor.

Si dos sistemas de ejes cartesianos ortonormales tienen el mismo origen, las componentes de un vector se relacionan mediante una matriz ortogonal. De este modo se puede expresar una medida en los ejes del dispositivo o en los del laboratorio; su longitud es la misma en ambos sistemas.

Si los orígenes también cambian, aparece una traslación: $y = Qx + d$. Esta transformación conserva distancias, pero no es lineal cuando $d \neq 0$.

6.6 Algoritmos de cálculo

Algoritmo. Diagonalización ortogonal de una matriz simétrica.

Entrada: matriz real simétrica A .

Calcular los autovalores y una base de cada autoespacio.

Lista $B \leftarrow \emptyset$; lista $L \leftarrow \emptyset$.

Para cada autovalor λ :

 Aplicar Gram-Schmidt a la base de E_λ .

 Añadir los vectores obtenidos a B .

 Añadir λ a L por cada vector.

$Q \leftarrow$ columnas de B ; $D \leftarrow \text{diag}(L)$.

Devolver Q y D .

Basta ortonormalizar por separado la base de cada autoespacio, ya que los autoespacios distintos son ortogonales. Las matrices obtenidas deben satisfacer $Q^T Q = I$ y $AQ = QD$.

Algoritmo. Reconocer una transformación ortogonal en dos o tres dimensiones.

Entrada: matriz real cuadrada Q , de orden dos o tres.

Si $Q^T Q \neq I$: **devolver** «no es ortogonal».

$d \leftarrow \det Q$.

Si el orden es dos:

Si $d = 1$: giro con $\theta = \text{atan2}(q_{21}, q_{11})$.

Si $d = -1$: reflexión de eje $\ker(Q - I)$.

Si el orden es tres:

Si $Q = I$: identidad.

Si $Q = -I$: inversión respecto del origen.

En otro caso, si $d = 1$:

 Eje $\leftarrow \ker(Q - I)$; $\theta \leftarrow \arccos((\text{tr } Q - 1)/2)$.

En otro caso, si $d = -1$:

 Normal/eje $\leftarrow \ker(Q + I)$; $\theta \leftarrow \arccos((\text{tr } Q + 1)/2)$.

Si $\theta = 0$: reflexión en el plano perpendicular.

Si $\theta \neq 0$: giro combinado con esa reflexión.

Devolver la clasificación y los datos geométricos.

El signo del determinante indica si se conserva la orientación. Los núcleos de $Q - I$ y $Q + I$ permiten encontrar las direcciones fijas e invertidas. $\text{atan2}(y, x)$ calcula el ángulo teniendo en cuenta el cuadrante. La interpretación se comprueba aplicando Q a un vector del eje o de la normal y a otro perpendicular. Con datos decimales se usan tolerancias y se ajusta el argumento de $\arccos$ al intervalo $[-1, 1]$ si el redondeo lo ha rebasado ligeramente.

6.7 Ejercicios

6.1. Diagonaliza ortogonalmente $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y expresa $2x^2 + 2xy + 2y^2$ sin término cruzado.

6.2. Clasifica el signo de las formas con matrices $\text{diag}(2, 0, 3)$, $\text{diag}(1, -1)$ y $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

6.3. Obtén la matriz del giro de ángulo $\pi/3$ y la imagen de $(2, 0)$. Comprueba la norma.

6.4. Calcula la reflexión respecto de $y = x$ y su imagen de $(3, 1)$.

6.5. Con $n = (1, 1, 0)^T / \sqrt{2}$, construye la reflexión respecto de $x + y = 0$. Describe sus autoespacios.

6.6. Clasifica $Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y calcula Q^4 .

6.7. Decide si son ortogonales $M = \text{diag}(2, 1)$ y $N = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Describe la transformación de N .

6.8. Para $Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, calcula determinante, eje invertido y ángulo del giro en el plano perpendicular.

Apéndice A

Repaso de complejos y lenguaje algebraico

A.1 Operar en forma binómica

Un número complejo es $z = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$. Su parte real es a y su parte imaginaria es b , un número real. Los números reales se identifican con los complejos de parte imaginaria cero.

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d),$$

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

El conjugado y el módulo son

$$\bar{z} = a - ib, \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad z\bar{z} = |z|^2.$$

Para dividir por $w \neq 0$, se multiplica por su conjugado:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}.$$

Ejemplo A.1. Una división compleja.

$$\frac{2 + i}{1 - i} = \frac{(2 + i)(1 + i)}{2} = \frac{1 + 3i}{2}.$$

Multiplicar el resultado por $1 - i$ recupera $2 + i$.

A.2 Forma polar, potencias y raíces

Para $z \neq 0$, escribimos

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}, \quad r = |z| > 0.$$

El argumento θ es un ángulo determinado módulo 2π . Elegiremos el principal en $(-\pi, \pi]$. El cero tiene módulo cero y no tiene argumento definido. La identidad $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ relaciona las dos formas.

Para localizar el cuadrante, se usa $\theta = \text{atan2}(b, a)$. La expresión $\arctan(b/a)$ por sí sola no distingue entre puntos de cuadrantes opuestos y no se puede usar si $a = 0$.

Al multiplicar se multiplican módulos y se suman argumentos; al dividir se dividen módulos y se restan argumentos. Las igualdades entre argumentos se entienden módulo 2π .

$$z^n = r^n e^{in\theta}, \quad w_k = r^{1/n} e^{i(\theta + 2k\pi)/n}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

La segunda fórmula da las n raíces distintas de $w^n = z$ para $z \neq 0$ y entero $n \geq 1$. Si $z = 0$, la única raíz distinta es cero.

Ejemplo A.2. Tres raíces repartidas en el plano.

Para $w^3 = 8$, el módulo de cada raíz es dos y los ángulos son $0, 2\pi/3$ y $4\pi/3$. Las raíces son

$$2, \quad -1 + i\sqrt{3}, \quad -1 - i\sqrt{3}.$$

Todas tienen cubo ocho. No basta con dar únicamente la raíz real.

Algoritmo. Convertir a polar y calcular raíces.

Entrada: $z = a + ib$ y entero $n \geq 1$.

$r \leftarrow \sqrt{a^2 + b^2}$.

Si $r = 0$: **devolver** módulo cero y raíz cero.

$\theta \leftarrow \text{atan2}(b, a)$, elegido en $(-\pi, \pi]$.

Lista $L \leftarrow \emptyset$.

Para $k = 0, \dots, n - 1$:

$\alpha \leftarrow (\theta + 2k\pi)/n$.

 Añadir $r^{1/n}(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ a L .

Devolver (r, θ) y L .

Los argumentos de las raíces están separados por $2\pi/n$. Cada resultado debe tener potencia n igual a z ; si $z \neq 0$, se obtienen n raíces distintas.

Aplicación. Amplitud y fase.

La señal $s(t) = M \cos(\omega t + \phi)$ se puede escribir como la parte real de $Me^{i\phi}e^{i\omega t}$. El complejo $Me^{i\phi}$ reúne amplitud y fase. Con una frecuencia común, sumar señales equivale a sumar sus complejos representativos.

En este contexto de electrónica suele usarse j en lugar de i para la unidad imaginaria, para no confundirla con una corriente. Las operaciones matemáticas son las mismas.

A.3 Grupo, anillo y cuerpo

Estos términos resumen propiedades de las operaciones. Para estudiar álgebra lineal basta con reconocer su papel:

- Un **semigrupo** tiene una operación interna asociativa. Si además tiene elemento neutro, se llama **monoide**.
- Un **grupo** es un monoide en el que cada elemento tiene inverso. Si la operación es conmutativa, el grupo es abeliano. Los vectores con la suma forman un grupo abeliano.
- Un **anillo** tiene suma de grupo abeliano y un producto asociativo que distribuye sobre la suma. Un anillo unitario tiene una identidad para el producto. Las matrices cuadradas reales forman un anillo unitario.
- Un **cuerpo** es un anillo unitario conmutativo con $0 \neq 1$, donde cada elemento no nulo tiene inverso multiplicativo. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son cuerpos.

Los enteros no forman un cuerpo, porque, por ejemplo, el inverso de dos no es un entero. Las matrices cuadradas de orden mayor que uno tampoco forman un cuerpo: el producto no es conmutativo y hay matrices no nulas sin inversa.

En un espacio vectorial, los escalares pertenecen a un cuerpo. Poder dividir por cualquier escalar no nulo permite aplicar Gauss sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.

A.4 Ejercicios de repaso

A.1. Calcula $(1 + 2i)(3 - i)$ y $(2 + i)/(1 - i)$.

A.2. Obtén módulo y argumento principal de $-1 + i\sqrt{3}$.

A.3. Calcula $(1 + i)^4$ y todas las raíces de $w^3 = 8$.

A.4. Explica por qué $\mathbb{Z}$ no es un cuerpo y por qué los vectores forman un grupo para la suma.

Apéndice B

Soluciones explicadas

La numeración coincide con la de los ejercicios. Las bases que se obtengan pueden diferir de las indicadas aquí, siempre que sean independientes y generen el mismo espacio. En los cambios de base y en las formas de Jordan hay que respetar el orden de las columnas.

B.1 Tema 1. Matrices y sistemas

1.1 Los tamaños son 2×2 para AB y 3×3 para BA . Multiplicando fila por columna:

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Por ejemplo, $(AB)_{12} = 1 \cdot 0 + 2(-1) + 0 \cdot 3 = -2$.

1.2 $\det M = 3 - 2 = 1$, por lo que

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad MM^{-1} = \begin{pmatrix} 3-2 & -3+3 \\ 2-2 & -2+3 \end{pmatrix} = I.$$

1.3 Tras eliminar la primera columna e intercambiar las filas segunda y tercera se llega a

$$\begin{cases} x + y + z = 4, \\ y - 2z = -2, \\ -7z = -12. \end{cases}$$

La sustitución hacia atrás da $(x, y, z) = (6/7, 10/7, 12/7)$. Las tres ecuaciones iniciales devuelven 4, 2 y 2.

1.4 Restar el doble de la primera ecuación a la segunda da $0 = 0$. El rango es uno y hay dos parámetros:

$$(x, y, z) = (1 - 2s + t, s, t), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Si el último término es tres, aparece $0 = 1$ y no hay solución.

1.5 La resta de ecuaciones da $(a - 1)y = 0$. Si $a \neq 1$, la solución es $(2, 0)$. Si $a = 1$, queda una única ecuación y las soluciones son $(2 - t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

1.6 La segunda fila duplica la primera y la tercera es independiente: $\text{rg } N = 2$. Las ecuaciones esenciales son $x + 2y + z = 0$ e $y + z = 0$. De ellas:

$$(x, y, z) = t(1, -1, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

La nulidad es uno, de acuerdo con $3 - 2$.

1.7 La segunda ecuación da $i_1 = 2i_2$. En la primera, $6i_2 - i_2 = 5$, así que $i_2 = 1$ A e $i_1 = 2$ A. Las comprobaciones son $3 \cdot 2 - 1 = 5$ y $-2 + 2 \cdot 1 = 0$.

1.8 Como T es triangular, $\det T = 2(-3)5 = -30$. Es invertible. Al multiplicar toda una matriz de orden tres por dos:

$$\det(2T) = 2^3 \det T = -240.$$

B.2 Tema 2. Espacios y bases

2.1 U es subespacio porque está definido por una ecuación lineal homogénea. W no contiene al cero. S es la unión de los ejes: contiene $(1, 0)$ y $(0, 1)$, pero no su suma $(1, 1)$. Por tanto, S tampoco es subespacio.

2.2 $w = u + v$, de modo que basta $B = (u, v)$. Los dos primeros componentes prueban su independencia. Como

$$(2, -1, 1) = 2u - v,$$

las coordenadas en B son $(2, -1)^T$.

2.3 Resolver $c_1 + c_2 = 5$, $c_1 - c_2 = 1$ da $[v]_B = (3, 2)^T$. Las matrices son

$$P_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P_B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La primera convierte de B a coordenadas canónicas; la segunda realiza el cambio contrario.

2.4 Podemos elegir

$$B_U = ((-1, 1, 0), (-1, 0, 1)), \quad B_W = ((1, 0, 0), (0, 1, 0)).$$

En la intersección se imponen ambas ecuaciones: $z = 0$ y $x + y = 0$. Una base es $((1, -1, 0))$. Así, las dimensiones son dos, dos y uno. La suma tiene dimensión $2 + 2 - 1 = 3$, luego es $\mathbb{R}^3$. No es directa.

2.5 Elige $x_3 = s$ y $x_4 = t$. La segunda ecuación da $x_2 = s - t$ y la primera $x_1 = -2s + t$. Una base es

$$((-2, 1, 1, 0), (1, -1, 0, 1)).$$

Hay dos parámetros independientes.

2.6 Para $p = a + bt + ct^2$, las condiciones dan $a = 0$ y $b + c = 0$. Por tanto $p = c(t^2 - t)$ y una base es $(t^2 - t)$. El polinomio solicitado tiene coordenada tres.

2.7 Se puede añadir $e_1 = (1, 0, 0)$:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Como la familia completa es una base, la recta $\text{span}\{e_1\}$ es un suplementario del plano generado por los dos vectores iniciales.

2.8 Una combinación tiene forma $(a, b, a + b)$. La ecuación implícita es $x + y - z = 0$. Para $(2, 3, 4)$ resulta $2 + 3 - 4 = 1$, por lo que no pertenece. Equivale a comprobar que el sistema de coeficientes de la combinación es incompatible.

B.3 Tema 3. Aplicaciones lineales

3.1 Solo f es lineal, con matriz $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Para g , $g(2, 0) = (4, 0) \neq 2g(1, 0)$; para h , $h(0, 0) \neq 0$.

3.2 La segunda fila repite el doble de la primera. Por tanto,

$$\ker A = \text{span}\{(-2, 1, 0), (1, 0, 1)\}, \quad \text{Im } A = \text{span}\{(1, 2)\}.$$

Tiene rango uno y nulidad dos. No es inyectiva, porque el núcleo no es cero, ni sobreyectiva, porque la imagen no es todo $\mathbb{R}^2$.

3.3 Las imágenes de $1, t, t^2$ son $0, 1, 2t$. Así,

$$[D] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

El núcleo es el espacio de constantes, con base (1) ; la imagen es $\mathcal{P}_1$, con base $(1, t)$. El balance de dimensiones es $1 + 2 = 3$.

3.4 Con $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $G = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$:

$$[g \circ f] = GF = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [f \circ g] = FG = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El orden cambia el resultado.

3.5 Las imágenes conocidas forman las columnas de $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ en la base de entrada $B = ((1, 1), (1, -1))$. La matriz canónica es

$$A = MP_B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto $f(2, 3) = (7, 3)$.

3.6 $A_B = P^{-1}AP = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, con $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Ambos productos AP y PA_B son $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3.7 La salida pertenece a $\text{span}\{(1, 0)\}$ si su segunda componente es cero. Eso equivale a $z = 0$. Así,

$$f^{-1}(W) = \text{span}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}, \quad \dim f^{-1}(W) = 2.$$

3.8 $Cx = (x_1, x_2)^T$. Las variaciones $(0, 0, t)$ pasan inadvertidas: forman $\ker C$. La imagen es $\mathbb{R}^2$ y se obtienen dos componentes independientes.

B.4 Tema 4. Autovalores y Jordan

4.1 Los autovalores son tres y uno, con autovectores $(1, 1)$ y $(1, -1)$. Una elección es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \text{diag}(3, 1).$$

Como $AP = PD$, se tiene $A^3 = P \text{diag}(27, 1)P^{-1} = \begin{pmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}$.

4.2 $\text{diag}(2, 2)$ ya es diagonal. La segunda matriz tiene un autoespacio de dimensión uno para un autovalor de multiplicidad dos: no es diagonalizable. La tercera tiene polinomio $\lambda^2 + 1$ y no se diagonaliza sobre $\mathbb{R}$. Sobre $\mathbb{C}$, una elección es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}, \quad D = \text{diag}(i, -i).$$

Sus columnas satisfacen las ecuaciones de autovector y son independientes.

4.3 Por triangularidad, el polinomio es $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$. Se obtiene

$$E_1 = \text{span}\{(1, 0, 0)\}, \quad E_2 = \text{span}\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

Las dimensiones coinciden con las multiplicidades. Podemos tomar

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \text{diag}(1, 2, 2).$$

4.4 Con $v_1 = (3, 0)$ y $v_2 = (0, 1)$, se cumple $(A - 2I)v_1 = 0$ y $(A - 2I)v_2 = v_1$. Así, $P = \text{diag}(3, 1)$ y $J = J_2(2)$. Para $k \geq 1$:

$$A^k = PJ^kP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^k & 3k2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

4.5 Las diferencias $d_1 - d_0$, $d_2 - d_1$ y $d_3 - d_2$ son tres, dos y uno. Hay tres bloques en total, dos de tamaño al menos dos y uno de tamaño al menos tres. Por tanto los tamaños son $3 + 2 + 1$, que suman seis.

4.6

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = 0.$$

Los núcleos son $\text{span}\{e_1\}$, $\text{span}\{e_1, e_2\}$ y $\mathbb{R}^3$. Sus dimensiones uno, dos y tres identifican un único bloque de tamaño tres. La base canónica ya forma la cadena $Ne_1 = 0$, $Ne_2 = e_1$, $Ne_3 = e_2$.

4.7 Los autovalores son 0.9 y 0.7, ambos de módulo menor que uno. Todos los estados convergen a cero. Como $(1, 0) = \frac{1}{2}(1, 1) + \frac{1}{2}(1, -1)$:

$$x_k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0.9^k + 0.7^k \\ 0.9^k - 0.7^k \end{pmatrix}.$$

Para $k = 0$ devuelve el estado inicial.

4.8 $A(x, 0)^\top = (x, 0)^\top$, luego U es invariante. Como $A^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$A^k(0, 1)^\top = (k, 1)^\top.$$

El factor k hace crecer la norma. Procede de un bloque de Jordan de tamaño dos, aunque su autovalor tenga módulo uno.

B.5 Tema 5. Ortogonalidad y ajuste

5.1 $\langle u, v \rangle = 1$, $\|u\| = \|v\| = \sqrt{2}$ y $d(u, v) = \sqrt{2}$. El ángulo cumple $\cos \theta = 1/2$, por lo que $\theta = \pi/3$.

5.2 La primera normalización da $q_1 = (1, 1, 0)/\sqrt{2}$. Al restar su componente de v_2 queda $w_2 = (1, -1, 2)/2$, de norma $\sqrt{6}/2$. Por tanto:

$$q_2 = (1, -1, 2)/\sqrt{6}.$$

El producto entre ambos es $(1 - 1)/\sqrt{12} = 0$ y ambas normas son uno.

5.3 Con $u = (1, 1)$ y $v = (3, 1)$:

$$p = \frac{v^T u}{u^T u} u = \frac{4}{2}(1, 1) = (2, 2).$$

El residuo $(1, -1)$ es perpendicular a u y la distancia es $\sqrt{2}$.

5.4 Una normal unitaria es $n = (1, 1, 1)/\sqrt{3}$. Proyectar sobre el plano elimina la componente normal:

$$\Pi = I - nn^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se obtiene $\Pi(2, 1, 0)^T = (1, 0, -1)^T$. Como $n^T n = 1$, $(I - nn^T)^2 = I - nn^T$.

5.5 Las ecuaciones normales son $2\hat{x} + \hat{y} = 5$ y $\hat{x} + 2\hat{y} = 6$. Su solución es $(4/3, 7/3)$. El residuo $r = (-1/3, -1/3, 1/3)^T$ satisface

$$A^T r = \begin{pmatrix} r_1 + r_3 \\ r_2 + r_3 \end{pmatrix} = 0.$$

El error mínimo al cuadrado es $1/3$.

5.6 Las sumas necesarias son $\sum t_i = 3$, $\sum t_i^2 = 5$, $\sum y_i = 5$ y $\sum t_i y_i = 6$. Resolver las normales da $a = 7/6$ y $b = 1/2$. Las predicciones son $7/6$, $5/3$ y $13/6$. Los residuos son $-1/6$, $1/3$ y $-1/6$, con suma de cuadrados $1/6$.

5.7 Para $u = (1, 1)$:

$$\langle v, u \rangle_G = 2, \quad \langle u, u \rangle_G = 3, \quad p = (2/3, 2/3).$$

El residuo es $(1/3, -2/3)$, perpendicular a u en el producto ponderado. Su norma al cuadrado es $2(1/3)^2 + (-2/3)^2 = 2/3$. La distancia es $\sqrt{2/3}$.

5.8 Las columnas de A son los vectores del ejercicio 5.2. Al registrar las componentes en Gram-Schmidt:

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{6}/2 \end{pmatrix}.$$

Para $b = (1, 2, 0)^T$, se tiene $Q^T b = (3/\sqrt{2}, -1/\sqrt{6})^T$. Resolver $Rx = Q^T b$ desde la segunda fila da

$$\hat{x} = (5/3, -1/3)^T.$$

El residuo es $(-1/3, 1/3, 1/3)^T$ y su producto con cada columna de A es cero.

B.6 Tema 6. Geometría de las matrices

6.1 Una matriz ortogonal de autovectores es $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, con $D = \text{diag}(3, 1)$. Para $(x, y)^T = Q(z_1, z_2)^T$,

$$2x^2 + 2xy + 2y^2 = 3z_1^2 + z_2^2.$$

Los dos coeficientes positivos muestran que la forma es definida positiva.

6.2 $\text{diag}(2, 0, 3)$ es semidefinida positiva y se anula en el eje de la segunda coordenada. $\text{diag}(1, -1)$ es indefinida porque toma valores positivos y negativos. La tercera matriz es definida positiva, con autovalores tres y uno.

6.3

$$R_{\pi/3} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad R_{\pi/3}(2, 0)^\top = (1, \sqrt{3})^\top.$$

La norma de la imagen es $\sqrt{1+3} = 2$, igual a la inicial.

6.4 $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $S(3, 1)^\top = (1, 3)^\top$. El eje fijo es $\text{span}\{(1, 1)\}$ y la dirección invertida $\text{span}\{(1, -1)\}$.

6.5

$$S = I - 2nn^\top = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El autoespacio de uno es el plano $x + y = 0$, con base $((1, -1, 0), (0, 0, 1))$. El de menos uno es la recta $\text{span}\{(1, 1, 0)\}$.

6.6 Es ortogonal y tiene determinante uno. El eje fijo es el eje z y el giro en el plano xy tiene ángulo $\pi/2$. Cuatro giros de un cuarto de vuelta dan $Q^4 = I_3$.

6.7 $M^\top M = \text{diag}(4, 1) \neq I$, así que M no es ortogonal. Para N , las columnas tienen norma uno y producto cero; $\det N = 1$. Es un giro con $\cos \theta = 3/5$, $\sin \theta = 4/5$ y $\theta = \text{atan2}(4, 3)$.

6.8 $\det Q = -1$ y $\ker(Q + I) = \text{span}\{(0, 0, 1)\}$. En el plano xy gira $\pi/2$, mientras invierte la coordenada z . Es la composición del giro alrededor de z con la reflexión respecto de $z = 0$. La fórmula de la traza da $\cos \theta = (\text{tr } Q + 1)/2 = 0$.

B.7 Repaso del apéndice A

A.1 Distribuir y usar $i^2 = -1$ da $(1 + 2i)(3 - i) = 5 + 5i$. Para dividir, se multiplica por $1 + i$:

$$\frac{2 + i}{1 - i} = \frac{1 + 3i}{2}.$$

A.2 El módulo es $\sqrt{1+3} = 2$. El punto está en el segundo cuadrante, con argumento principal $2\pi/3$. Así, $-1 + i\sqrt{3} = 2e^{2\pi i/3}$.

A.3 $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, luego $(1 + i)^4 = 4e^{i\pi} = -4$. Las raíces de $w^3 = 8$ son 2 , $-1 + i\sqrt{3}$ y $-1 - i\sqrt{3}$, separadas por ángulos de $2\pi/3$.

A.4 En $\mathbb{Z}$, dos es no nulo y su inverso multiplicativo $1/2$ no pertenece al conjunto: no es un cuerpo. Los vectores con la suma tienen asociatividad, neutro cero, opuestos y conmutatividad; por ello forman un grupo abeliano.

Apéndice C

Formulario y guía de decisión

Se reúnen aquí las fórmulas y los criterios de cálculo de los temas anteriores. En cada caso deben tenerse en cuenta las hipótesis indicadas.

C.1 Sistemas, bases y aplicaciones

Sistema $Ax = b$, con n incógnitas.

$$\begin{array}{ll} \operatorname{rg} A < \operatorname{rg}(A \mid b) & \text{sin solución,} \\ \operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A \mid b) = n & \text{solución única,} \\ \operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A \mid b) = r < n & n - r \text{ parámetros libres.} \end{array}$$

Si es compatible, todas las soluciones son $x_p + \ker A$. Si $b = 0$, siempre existe la solución cero.

Bases y dimensiones.

- k columnas son independientes si su rango es k .
- Para extraer una base de generadores, se conservan las columnas originales con pivote.
- Para $U = \ker A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\dim U = n - \operatorname{rg} A$.
- $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.
- $U + W$ es suma directa si $U \cap W = \{0\}$.

Coordenadas y matrices de aplicaciones.

Si P_B y P_C contienen las bases en coordenadas canónicas:

$$v = P_B[v]_B, \quad [v]_C = P_C^{-1}P_B[v]_B.$$

Si $x_{\text{ant}} = Px_{\text{nuev}}$ e $y_{\text{ant}} = Qy_{\text{nuev}}$:

$$A_{\text{nuev}} = Q^{-1}AP.$$

En un endomorfismo, cambiando a la misma base en entrada y salida, $A_{\text{nuev}} = P^{-1}AP$. Para una aplicación $V \rightarrow W$:

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V.$$

Injectiva: núcleo cero. Sobreyectiva: imagen igual al espacio de llegada.

C.2 Autovalores y geometría

Diagonalización y Jordan.

$$p_A(t) = \det(tI - A), \quad E_\lambda = \ker(A - \lambda I).$$

Diagonalizable sobre $\mathbb{K}$: el polinomio se descompone en $\mathbb{K}$ y $\dim E_\lambda = m_a(\lambda)$ para todos sus autovalores.

$$AP = PD, \quad A^k = PD^kP^{-1}.$$

Para Jordan, con $d_s = \dim \ker(A - \lambda I)^s$:

$$\begin{aligned} \# \text{ bloques de tamaño } &\geq s = d_s - d_{s-1}, \\ \# \text{ bloques de tamaño } s &= 2d_s - d_{s-1} - d_{s+1}. \end{aligned}$$

Una cadena se ordena desde el autovector hasta su último vector generalizado. Siempre se verifica $AP = PJ$.

Proyección y mínimos cuadrados.

Si (q_j) es una base ortonormal de U :

$$p = \sum_j \langle q_j, v \rangle q_j, \quad d(v, U) = \|v - p\|.$$

En el producto usual, para una matriz M de columnas independientes:

$$\Pi_U = M(M^T M)^{-1} M^T.$$

Para minimizar $\|Ax - b\|^2$:

$$A^T A \hat{x} = A^T b, \quad A^T (b - A \hat{x}) = 0.$$

Si $\text{rg } A = n$, el minimizador es único. Con QR reducida, se resuelve $R \hat{x} = Q^T b$.

Simetría y ortogonalidad.

$$A^T = A \implies A = Q D Q^T \quad \text{con } Q^T Q = I, \quad D \text{ real diagonal.}$$

$$Q^T Q = I \implies Q^{-1} = Q^T, \quad \|Qv\| = \|v\|, \quad \det Q = \pm 1.$$

Con un producto de matriz G : simetría del endomorfismo significa $A^T G = G A$; conservación del producto significa $Q^T G Q = G$.

C.3 Elección del método de cálculo

Pregunta	Primer procedimiento
¿Cuántas soluciones tiene un sistema?	Escalonar la matriz ampliada y buscar contradicciones; después contar variables libres.
¿Qué vectores forman una base?	Escalonar la matriz de columnas y seleccionar las columnas originales con pivote.
¿Cuáles son las coordenadas de un vector?	Resolver $P_B c = v$.
¿Qué entra sin producir salida?	Resolver $Ax = 0$: es el núcleo.
¿Qué salidas son posibles?	Extraer una base del espacio de columnas: es la imagen.
¿Se puede diagonalizar?	Factorizar el polinomio característico y comparar multiplicidades con dimensiones de autoespacios.
¿Qué forma de Jordan tiene?	Calcular núcleos de potencias y contar bloques; después construir las cadenas.
¿Cuál es el punto más cercano de un subespacio?	Obtener una base ortonormal y proyectar.
¿Cómo ajustar un sistema incompatible?	Resolver por mínimos cuadrados y comprobar $A^T r = 0$.
¿Conserva una matriz la geometría usual?	Comprobar $Q^T Q = I$; después usar determinante y autoespacios para interpretarla.

C.4 Comprobación de los resultados

1. **Tamaños.** Antes de multiplicar, anota filas y columnas.
2. **Pivotes.** Si un parámetro puede anular un divisor, separa ese caso.
3. **Bases.** Una base necesita independencia y generación; cuenta su dimensión.
4. **Cambios de coordenadas.** Escribe primero la ecuación que reconstruye el vector.
5. **Autovectores.** Sustituye en $Av = \lambda v$ y descarta el cero.
6. **Proyección.** El resultado pertenece al subespacio y el residuo es ortogonal a él.
7. **Ajuste.** El residuo no tiene por qué ser cero; debe cumplir $A^T r = 0$.
8. **Complejos.** El cuadrante decide el argumento; una raíz polinómica puede no ser única.

Créditos y procedencia

Adaptación docente: Roberto Giménez Conejero.

Álgebra Lineal para el Grado en Ingeniería Electrónica Industrial y Automática. Curso 2026-2027.

El material de partida es *Apuntes de Álgebra Lineal, curso 2026/27*, de **Javier Sanguino**, Departamento de Matemática Aplicada a la Ingeniería Industrial, Universidad Politécnica de Madrid, facilitado en el archivo `ApuntesAlgebra_ALUMNOS.pdf`.

Se han adaptado el orden y las explicaciones a esta asignatura, con ejemplos de electrónica y automática. Se incluyen ejercicios con soluciones y los principales procedimientos de cálculo en pseudocódigo. Esta segunda versión presenta una redacción revisada y una maquetación simplificada.

La obra de partida declara la licencia **Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0)**. Esta adaptación se distribuye bajo la misma licencia.

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>